Über den Einfang kleiner Partikel durch die Sonne auf Grund des Poynting-Robertson-Effektes

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

der

Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Eberhard-Karls-Universität

zu Tübingen

vorgelegt von

Dietrich Schäfer

aus Ostrach

1964

7911

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547601_0121

Über den Einfang kleiner Partikel durch die Sonne auf Grund des Poynting-Robertson-Effektes

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der
Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Eberhard-Karls-Universität
zu
Tübingen

vorgelegt von
Dietrich S c h ä f e r
aus Ostrach
1964

Tag der mündlichen Prüfung: 23.7.1964
Dekan: Prof.Dr.P.Roquette
1.Berichterstatter: Prof.Dr.H.Elsässer
2.Berichterstatter: Prof.Dr.G.Elwert

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Inhalt

Einleitung 1

I. Ableitung der Bewegungsgleichungen 4

II. Lösung der Bewegungsgleichungen 9

III. Diskussion der Lösungen 11

IV. Ableitung und angenäherte Lösung der Bedingungsgleichungen für den Einfang der Partikel durch die Sonne 21

V. Anwendung der Formel (81) 28

VI. Anwendung der Formel (81) auf die von Neuen Kometen ausgeworfenen Staubteilchen 37

VII. Berücksichtigung des korpuskularen Poynting-Robertson-Effektes 43

Zusammenfassung 47

Literatur 56

Über den Eingang kleiner Partikel durch die Sonne aufgrund des Poynting-Robertson-Effektes

Einleitung

Die Vorstellung, daß das Zodiakallicht durch Streuung des Sonnenlichts an interplanetären Staubteilchen entstehe, ist schon alt. Sie wurde durch Beobachtungen und Rechnungen weiterentwickelt zu Modellen, die Aussagen über die Dichteverteilung der Teilchen in Abhängigkeit vom Teilchenradius und von der Entfernung von der Sonne erlauben. (Behr u. Siedentopf, 1953; H.Elsässer, 1954, 1958; Giese u. Siedentopf 1962.) Andererseits ließen sich auch die Verteilungsfunktionen für die Bahnelemente aus diesen Modellen bestimmen (Haug, 1958).

Nach Poynting (1903) und Robertson (1937) wird ein Teilchen in seiner Bahn um die Sonne jedoch gebremst. Dies kommt dadurch zustande, daß das Teilchen gegen den Strahlungsdruck Arbeit leisten muß. Die Rechnung von Robertson ergibt, daß alle Teilchen, die dem Sonnensystem angehören, langsam auf spiralartigen Bahnen in die Sonne hineinfallen, wobei die Zeit T, welche die Teilchen dazu benötigen, durch die Formel:

$$T = 7.0 \cdot 10^6 \cdot a\varrho R^2 \quad \text{Jahre} \qquad (1)$$

gegeben ist. Dabei ist a der Teilchenradius in cm, ϱ die Dichte des Teilchens in g/cm^3 und R der anfängliche Abstand des Teilchens von der Sonne in A.E. gemessen. Außerdem ist, wie in dieser ganzen Arbeit, Kugelsymmetrie der Teilchen vorausgesetzt. Einen groben Überblick über die Lebensdauer von Eisenteilchen (ϱ = 7,8 g/cm^3) gibt Tab. 1.

Aufgrund eines Modells für die interplanetare Staubwolke hat nun F.L.Whipple (1955) eine Abnahme von 1 to/sec dieser Wolke errechnet. Diese Abnahme wird nach Whipple aber ausgeglichen durch die Auflösung von Kometen in kleine Teilchen.

Tabelle 1. Lebensdauer T in Jahren von Eisenteilchen in Abhängigkeit vom Teilchenradius a in cm und anfänglichem Abstand R in A.E. von der Sonne.

R \ a	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	2.10^{-5}
1	$5.46.10^{7}$	$5.46.10^{6}$	$5.46.10^{5}$	$5.46.10^{4}$	$5.46.10^{3}$	$1.1.10^{3}$
0.5	$1.37.10^{7}$	$1.37.10^{6}$	$1.37.10^{5}$	$1.37.10^{4}$	$1.37.10^{3}$	$2.7.10^{2}$
0.25	$3.41.10^{6}$	$3.41.10^{5}$	$3.41.10^{4}$	$3.41.10^{3}$	$3.41.10^{2}$	$6.8.10^{1}$

Dagegen hat Harwitt (1963) darauf aufmerksam gemacht, daß Whipple dabei einen Effekt vernachlässigt hat, der am besten an einem Kometen mit nahezu parabolischer Bahn erklärt werden kann: Der Strahlungsdruck des Sonnenlichts spielt bei einem Kometen praktisch keine Rolle, sehr wohl jedoch bei kleinen Teilchen mit Radien 0.2 μ - 100 μ. Verliert der Komet ein solches Teilchen, s hat es praktisch die Entweichgeschwindigkeit am Ort seiner Ablösung. Nun kommt aber der Strahlungsdruck hinzu, der der Gravitation entgegenwirkt. Praktisch wirkt der Strahlungsdruck wie eine Verminderung der Gravitationskraft. Damit liegt aber die Geschwindigkeit des Teilchens, die ja die Entweichgeschwindigkei bei bloßem Wirken der Gravitation ist, über der Entweichgeschwindigkeit, die man bei Berücksichtigung von Gravitation und Strahlungsdruck erhält. Das Teilchen entkommt also aus dem Sonnensystem. Schreibt man sich die Gravitationskraft S auf, die auf das Teilchen wirkt:

$$S = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho \gamma \cdot \frac{M_\odot}{R^2} \qquad (2)$$

und desgleichen die Strahlungsdruckkraft P:

$$P = \frac{\pi a^2}{c} \left(\frac{R_\odot}{R^2}\right)^2 \int_0^\infty Q_{pr}(a,\nu)\, I_\nu\, d\nu \qquad (3)$$

wo a den Teilchenradius, ρ die Teilchendichte, γ die Gravitationskonstante, $M_\odot$ die Sonnenmasse, R den Abstand des Teilchens und R den Abstand der Erde von der Sonne, c die Lichtgeschwindigkeit, I_ν die Intensitätsverteilung der Sonnenstrahlung am Erdort und $Q_{pr}(a,\nu)$ den Wirkungsfaktor für den Strahlungsdruck bedeutet, (Giese, 1960), so sieht man aus

$$P/S = \frac{3}{4}\left(c \cdot \frac{\gamma M_\odot}{R_\odot^2}\right)^{-1} \frac{\int_0^\infty Q_{pr}(a,\nu) I_\nu \, d\nu}{a\varrho} \qquad (4)$$

daß dieses Verhältnis um so größer wird, je kleiner der Teilchenradius ist. Dabei ist noch vorausgesetzt, daß Q_{pr} schwach veränderlich ist, was, wie wir später sehen werden, für Eisenteilchen der Fall ist. Der von Harwitt diskutierte Effekt wird also besonders die Teilchen betreffen, bei denen etwa $1 \leq P/S \leq 0.01$ ist. Diese kleinen Teilchen spielen aber in den Modellen der Zodiakallichtmaterie eine große Rolle (Giese u. Siedentopf, 1962). Ist die Kometenbahn nicht parabelförmig, sondern eine Ellipse mit der Exzentrizität $\varepsilon \approx 0.8$, so ist die Geschwindigkeit des Kometen zwar kleiner als die Entweichgeschwindigkeit, aber es gibt immer noch sehr kleine Teilchen, die aufgrund des oben beschriebenen Effektes das Sonnensystem verlassen. Dazu kommt noch, daß gerade die Kometen mit fast parabelförmiger Bahn mehr Staub auswerfen, als solche mit Bahnexzentritäten $\varepsilon \leq 0{,}8$. Dies wird von Harwitt ausführlich diskutiert. Er kommt zu dem Schluß, daß wahrscheinlich die Hauptmasse der kleinen Teilchen, die für das Zodiakallicht verantwortlich sind, bei Zusammenstößen von Planetoiden entstanden sein müsse, und daß, da solche Zusammenstöße sich nicht hinreichend oft ereignen, die Zodiakallichtteilchenwolke zu unserer Zeit zufällig besonders dicht sei.

Nun zeigte eine Rechnung von Best und Patterson (1962), daß das Strahlungsfeld der Sonne auf Grund des Poynting-Robertson-Effektes durchaus imstande ist, Partikel des interstellaren Staubes so abzubremsen, daß ein gewisser Anteil der von der Sonne durchquerten interstellaren Staubwolke im Sonnensystem verbleibt. Best und Patterson errechneten eine Massenzunahme von 0,3 to/sec, die auf diesen Effekt zurückgeht.

Sie berücksichtigten jedoch nicht, daß es für dielektrische Partikel zwei getrennte Intervalle des Teilchenradius gibt, für die der Strahlungsdruck kleiner ist als die Gravitationskraft (Schalén, 1939). Ferner setzten sie den Wirkungsquerschnitt für den Strahlungsdruck einfach dem geometrischen Querschnitt des Teilchens gleich, d.h., in (3) ist $Q_{pr} \equiv 1$. Q_{pr} kann aber, wie wir später sehen werden, in gewissen, wenn auch kleinen Intervallen, bei bestimmten Materialien größer als 2 werden. Es ergab

sich also die Frage, ob man nicht durch Berücksichtigung dieser neuen Gesichtspunkte die von Best und Patterson errechnete Massenzunahme erhöhen könnte.

Weiterhin kann man sich überlegen, ob durch Berücksichtigung des Energieverlustes von kometarischen Teilchen, der sich aus dem Poynting-Robertson-Effekt ergibt, nicht doch ein wesentlicher Bruchteil dieser Partikel dem Sonnensystem erhalten bleib

I. Ableitung der Bewegungsgleichungen.

Die Ableitung der Bewegungsgleichung lehnt sich an die von W.Guess (1962) gegebene an, der allerdings nicht die Veränderlichkeit des Wirkungsfaktors für den Strahlendruck diskutierte, sondern die Flächenhaftigkeit der Sonne als Strahlungsquelle. Es sei ein festes (x_0,y_0)-System mit der Sonne als Ursprung gegeben, desgleichen ein festes System (x,y) mit demselben Ursprung, dessen x-Achse jedoch im Augenblick der Rechnung auf das Teilchen weist (Abb.1). Die äußeren Kräfte, die auf das Teilchen wirken, werden im (x,y)-System berechnet, weil sie dort am leichtesten darzustellen sind. Sie sind dann zugleich die äußeren Kräfte im (x_0,y_0)-System bzw. in dem damit verknüpften Polarkoordinatensystem (R,Θ), in dem dann die Bewegungsgleichungen aufgestellt werden. Ferner sei ein zum (x,y)-System achsenparalleles momentanes Ruhsystem (x',y') des Teilchens gegeben mit dem Teilchen als Ursprung. Weiter sei $\vec{l} = (l_1,l_2)=(1,0)$ der Einheitsvektor in Richtung des Lichtstrahles im (x,y)-System. Beziehen wir die gestrichenen Größen auf das (x',y')-System, die ungestrichenen auf das (x,y)-System, dann gelten die

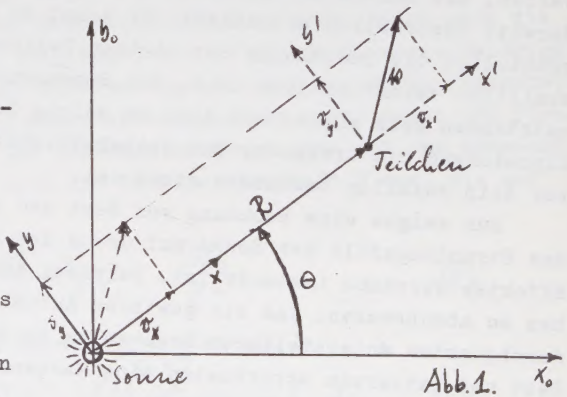


Abb.1.

Transformationsformeln (Thomas, 1930):

$$\vec{l}' = \frac{\vec{l}(1-w^2/c^2)^{1/2} + [1-(1-w^2/c^2)^{1/2}][\vec{l}\vec{w}/w^2]\vec{w} - \vec{w}/c}{(1-\vec{l}\vec{w}/c)} \quad (5)$$

$$\nu' = \frac{\nu(1-\vec{l}\vec{w}/c)}{(1-w^2/c^2)^{1/2}} \quad (6)$$

$$I'_{\nu'} = \frac{I_\nu(1-\vec{l}\vec{w}/c)}{(1-w^2/c^2)^{1/2}} \quad (7)$$

Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit, ν die Frequenz der von der Sonne kommenden Strahlung, I_ν die Energie pro cm^2 und pro Frequentintervall und pro Sekunde derselben. Die durch die Strahlung der Sonne auf das Teilchen wirkenden Kräfte im (x',y')-System sind dann gegeben durch:

$$F'_{x'} = l'_1 \frac{\pi a^2}{c} \int_0^\infty Q_{pr}(a,\nu') I'_{\nu'} d\nu' \quad (8)$$

$$F'_{y'} = l'_2 \frac{\pi a^2}{c} \int_0^\infty Q_{pr}(a,\nu') I'_{\nu'} d\nu' \quad (9)$$

a ist dabei der Radius des Teilchens im (x',y')-System, l'_1 und l'_2 sind die Richtungscosinus des Lichtstrahls im gestrichenen System. $Q_{pr}(a,\nu')$ hängt außerdem noch vom Brechungsindex des Teilchens ab. Mit $\vec{l} = (1,0)$, also $\vec{l}\vec{w} = v_x$, erhält man aus (5) bis auf Größen höherer Ordnung:

$$l'_1 = \frac{1-\frac{v_x}{c}}{1-\frac{v_x}{c}} = 1 \quad (10)$$

$$l'_2 = \frac{-\frac{v_y}{c}}{1-\frac{v_x}{c}} \quad (11)$$

Weiter ist, wieder bis auf Größen höherer Ordnung:

$$Q_{pr}(a,\nu') = Q_{pr}(a,\nu) + \frac{dQ_{pr}}{d\nu}(\nu'-\nu) \tag{12}$$

und nach (6):

$$\nu'-\nu = -\frac{v_x}{c}\nu \tag{13}$$

also

$$Q_{pr}(a,\nu') = Q_{pr}(a,\nu) - \frac{dQ_{pr}}{d\nu}\frac{v_x}{c}\nu$$

Ersetzt man nun in (8) die Striche tragenden Größen durch ungestrichene gemäß (6), (7), (10) und (14), so ergibt sich:

$$F'_{x'} = \frac{\pi a^2 (1-v_x/c)^2}{c\cdot(1-v^2/c^2)} \int_0^\infty \left(Q_{pr}(a,\nu) - \frac{dQ_{pr}}{d\nu}\frac{v_x}{c}\nu\right) I_\nu d\nu \tag{15}$$

Dies ergibt bis auf quadratische Glieder in $\frac{v_x}{c}$:

$$F'_{x'} = \frac{\pi a^2}{c}\left(1-2\frac{v_x}{c}\right)\left(\int_0^\infty Q_{pr} I_\nu d\nu - \frac{v_x}{c}\int_0^\infty \frac{dQ_{pr}}{d\nu} I_\nu \nu d\nu\right) \tag{16}$$

oder:

$$F'_{x'} = \frac{\pi a^2}{c}\int_0^\infty Q_{pr} I_\nu d\nu \left(1-(2+\delta)\frac{v_x}{c}\right) \tag{17}$$

wo

$$\delta = \frac{\int_0^\infty \frac{dQ_{pr}(a,\nu)}{d\nu}\nu I_\nu d\nu}{\int_0^\infty Q_{pr}(a,\nu) I_\nu d\nu} \tag{18}$$

gesetzt ist.

Aus (9) errechnet man mit (6), (7), (11) und (14):

$$F'_{y'} = -\frac{\pi a^2}{c}\frac{v_y}{c}\int_0^\infty Q_{pr} I_\nu d\nu \tag{19}$$

Der Korrekturterm $\int \frac{dQ_{pr}}{d\nu}\nu I_\nu d\nu \cdot \frac{v_x}{c}$ ergibt hier eine Größe 2. Ordnung $\frac{v_x v_y}{c^2}$, fällt also weg.

Um sich einen Begriff von den auftretenden Integralen zu machen beachtet man, daß $Q_{pr}(a,\nu)$ auch als Funktion von $x = \frac{2\pi a}{\lambda} = \frac{2\pi a \nu}{c}$ dargestellt werden kann (van de Hulst, 1957). Dabei ist λ die Wellenlänge der zur Frequenz ν gehörenden

Strahlung, und es ist vorausgesetzt, daß der Brechungsindex n von ν unabhängig ist. Da I_λ eine einigermaßen schmale Verteilung um die Wellenlänge des Maximums von I_λ $\lambda \approx 5000 Å$ darstellt, wird man als grobe Näherung angeben können:

$$\int_0^\infty G_{pr}(a,\nu) I_\nu d\nu \approx G_{pr}(x_5) \int_0^\infty I_\nu d\nu \qquad (20)$$

mit $x_5 = \frac{2\pi a}{5000}$, wo a in Å gemessen wird.

Außerdem wird ungefähr gelten:

$$\int_0^\infty \left(\frac{dQ_{pr}(a,\nu)}{d\nu}\nu\right) I_\nu d\nu \approx \left(\frac{dG_{pr}}{d\nu}\nu\right)_{x_5} \int_0^\infty I_\nu d\nu \qquad (21)$$

mit

$$\left(\frac{dG_{pr}}{d\nu}\nu\right)_{x_5} = \left(\frac{dG_{pr}}{dx}\cdot\frac{dx}{d\lambda}\cdot\frac{d\lambda}{d\nu}\cdot\frac{c}{\lambda}\right)_{\lambda=5000Å} = \left(\frac{dG_{pr}}{dx}\right)_{x_5} \cdot x_5 \qquad (22)$$

oder

$$\delta \approx \left(\frac{dG_{pr}}{dx}\right)_{x_5} \frac{x_5}{G_{pr}(x_5)}$$

Mit Hilfe der Transformationsformel für die Kräfte $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}'$:

$$\mathfrak{f} = \left(\mathfrak{f}' - \left(\mathfrak{f}'\frac{\omega}{\omega^2}\right)\frac{\omega}{\omega^2}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{c^2}\right)^{1/2} + \left(\mathfrak{f}'\frac{\omega}{\omega^2}\right)\frac{\omega}{\omega^2}$$

(Panofsky und Philips, 1955) erhält man bis auf Größen 2.Ordnung die Kräfte im (x,y)-System:

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}'$$

also:

$$F_x = \frac{\pi a^2}{c}\left(\int_0^\infty Q_{pr} I_\nu d\omega\right)\left[1-(2+\delta)\frac{v_x}{c}\right] \qquad (24)$$

$$F_y = -\frac{\pi a^2}{c}\left(\int_0^\infty Q_{pr} I_\nu d\omega\right)\frac{v_y}{c} \qquad (25)$$

Diese Gleichungen lassen nun eine einfache Deutung zu: (25) stellt einen Aberrationsterm dar; (24) ist zusammengesetzt aus dem reinen Strahlungsdruck (Summand 1 in der eckigen Klammer) und dem Term mit $-(\delta+2)\frac{v_x}{c}$. Dieser läßt sich zerlegen in einen Dopplerterm $-\frac{v_x}{c}$, der die Änderung der Energie der einfallenden Photonen angibt, einen ebenso großen Term $-\frac{v_x}{c}$ der die Änderung ihrer Anzahl berücksichtigt und den Term mit δ, der die Änderung

von Q_{pr} mit der Frequenzverschiebung des einfallenden Lichtes, d.h., mit $\frac{v_x}{c}$ beschreibt.

Das Prinzip, nur lineare Glieder in $\frac{v_x}{c}$ bzw. $\frac{v_y}{c}$, zu berücksichtigen, bedeutet, daß die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \mathfrak{F}$$

in der Newtonschen Form genommen werden.

Führen wir noch durch

$$\overline{Q}_{pr} = \frac{\int_0^\infty Q_{pr} I_\nu d\nu}{\int I_\nu d\nu} \tag{26}$$

die neue Größe $\overline{Q}_{pr}$ ein, für die nach (20) gilt:

$$\overline{Q}_{pr} \approx Q_{pr}(x_s) \tag{27}$$

so ist:

$$\int_0^\infty Q_{pr} I_\nu d\nu = \frac{R_\odot^2}{R^2}\overline{Q}_{pr}\int_0^\infty (I_\nu)_\odot d\omega = \frac{R_\odot^2}{R^2}\overline{Q}_{pr} S \tag{28}$$

wo $(I_\nu)_\odot$ die Intensitätsverteilung der Sonnenstrahlung im Abstand 1 A.E. von der Sonne und S die Solarkonstante bedeutet. Bezeichnet man mit m die Masse des Teilchens, mit ϱ seine Dichte und definiert eine Konstante α:

$$\alpha = \overline{Q}_{pr}\frac{\pi a^2 S R_\odot^2}{mc^2} = \overline{Q}_{pr}\frac{3 S R_\odot^2}{4 a \varrho c^2} = \overline{Q}_{pr}\cdot\frac{2.57\cdot 10^{11}}{a\varrho}\frac{cm^2}{sec} \tag{29}$$

so wird aus (24) und (25):

$$F_x = \frac{\pi a^2}{c}\overline{Q}_{pr}\cdot\frac{S R_\odot^2}{R^2}\left[1-(2+\delta)\frac{v_x}{c}\right] = m\left(\frac{\alpha c}{R^2} - \frac{(2+\delta)\alpha v_x}{R^2}\right) \tag{30}$$

$$F_y = -\frac{\pi a^2}{c}\overline{Q}_{pr}\frac{S R_\odot^2}{R^2}\frac{v_y}{c}m = -\alpha\frac{v_y}{R^2}m \tag{31}$$

Addiert man zu F_x noch die Gravitationskraft $-\frac{m\mu_0}{R^2}$, wo

$\mu_0 = \gamma M_\odot$ ist, und geht dann zu Polarkoordinaten (R,Θ) über, so erhält man mit $v_x = \frac{dR}{dt}$, $v_y = R\frac{d\Theta}{dt}$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\left(R^2\frac{d\theta}{dt}\right) = -\frac{\alpha}{R}\frac{d\theta}{dt} \qquad (32)$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} - R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{\mu}{R^2} - \frac{(2+\delta)}{R^2}\alpha\frac{dR}{dt} \qquad (33)$$

mit $\mu = \mu_0 - \alpha C$.

Dies sind die gesuchten Bewegungsgleichungen. Sie stimmen für $Q_{pr} \equiv 1$, d.h. $\delta \equiv t$, mit den von Robertson (1937) abgeleiteten Gleichungen überein.

II. Lösung der Bewegungsgleichungen.

Gleichung (32) läßt sich integrieren zu:

$$R^2\dot{\theta} - R_0^2\dot{\theta}_0 = -\alpha(\theta - \theta_0)$$

Setzt man $\theta_0 = 0$ und $R_0^2\dot{\theta}_0 = h$, dann ist

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h - \alpha\theta}{R^2} \qquad (34)$$

h ist die Flächengeschwindigkeit für $t = t_0$.

Für $u = 1/R$ folgt aus (33):

$$-\frac{\ddot{u}}{u^2} - \frac{2\dot{u}^2}{u^3} - \frac{1}{u}(h - \alpha\theta)^2u^4 = -\mu u^2 + (2+\delta)\alpha\dot{u} \qquad (35)$$

Ersetzt man $\frac{d}{dt}$ gemäß (34) durch $\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}\left(\quad\right)\frac{(h-\alpha\theta)}{R^2}$

so wird aus (35):

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{(1+\delta)\alpha}{(h-\alpha\theta)}\frac{du}{d\theta} + u = \frac{\mu}{(h-\alpha\theta)^2} \qquad (36)$$

Führt man neue Veränderliche durch

$$\phi = h/\alpha - \theta \quad , \quad z = \frac{\alpha^2u}{\mu\phi} \qquad (37)$$

ein, so ergibt sich schließlich die Dgl.:

$$\frac{d^2z}{d\phi^2} + \frac{(1-\delta)}{\phi}\cdot\frac{dz}{d\phi} + \left(1 - \frac{1+\delta}{\phi^2}\right)z = \frac{1}{\phi^3} \qquad (38)$$

Die Lösung der homogenen Gleichung (38) ist:

$$z_a = c_1 \phi^{\delta/2} J_{1+\delta/2}(\phi) + c_2 \phi^{\delta/2} Y_{1+\delta/2}(\phi) \qquad (39)$$

Dabei sind J, Y Zylinderfunktionen 1. und 2. Art (Jahnke-Emde-Lösch, 1960). Durch Variation der Konstanten c_1, c_2 erhält man die allgemeine Lösung von (38):

$$z = c_1 \phi^{\delta/2} J_{1+\delta/2}(\phi) + c_2 \phi^{\delta/2} Y_{1+\delta/2}(\phi)$$
$$+ \frac{\pi}{2} \phi^{\delta/2} \left\{ Y_{1+\delta/2}(\phi) \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{J_{1+\delta/2}(x)}{x^{2+\delta/2}} dx - J_{1+\delta/2}(\phi) \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{Y_{1+\delta/2}(x)}{x^{2+\delta/2}} dx \right\} \qquad (40)$$

Es sollen nun die Konstanten c_1, c_2 aus den Anfangswerten bestimmt werden. (θ_0 war nullgesetzt worden; dies kann dynamisch offenbar keine Einschränkung bedeuten.)
Für $t = t_0$ ist $\phi = \phi_0 = k/\alpha$, $\dot{z}_a = 1/u_0$.

Also gilt nach (40) und (37):

$$\frac{\alpha^2}{\mu k_0 \phi_0} = c_1 \phi_0^{\delta/2} J_{1+\delta/2}(\phi_0) + c_2 \phi_0^{\delta/2} Y_{1+\delta/2}(\phi_0) \qquad (41)$$

Dies ist die 1. Gleichung zur Bestimmung von c_1, c_2.
Nach (37) gilt:

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}$$

Weiter ist:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha^2}{\mu R}\right)_{t=t_0} = \left(\frac{d}{d\phi}\left(\frac{\alpha^2}{\mu R}\right)\frac{d\phi}{dt}\right)_{t=t_0} = \frac{d}{d\phi}\left(\frac{\alpha^2}{\mu R}\right)_{\phi=\phi_0} \cdot (-\dot{\theta}_0) \qquad (42)$$

Andererseits ist:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha^2}{\mu R}\right)_{t=t_0} = -\frac{\alpha^2}{\mu k_0^2}\dot{k}_0 \qquad (43)$$

Also wird schließlich

$$\frac{d}{d\phi}\left(\frac{\alpha^2}{\mu R}\right)_{\phi=\phi_0} = \frac{\alpha^2}{\mu k_0^2 \dot{\theta}_0}\dot{k}_0 = \frac{\alpha}{\mu \phi_0}\dot{k}_0 \qquad (44)$$

Beachtet man (37), so erhält man aus (40):

$$\frac{\dot r^2}{aR} = c_1 \phi^{\delta/2+1} J_{n+\delta/2}(\phi) + c_2 \phi^{\delta/2+1} Y_{n+\delta/2}(\phi)$$

$$+ \frac{\pi}{2} \phi^{\delta/2+1} \left\{ Y_{n+\delta/2}(\phi) \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{J_{n+\delta/2}(x)}{x^{2+\delta/2}} dx - J_{n+\delta/2}(\phi) \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{Y_{n+\delta/2}(x)}{x^{2+\delta/2}} dx \right\} \quad (45)$$

Differenziert man (45) nach ϕ und setzt $\phi = \phi_0$, so erhält man die 2. Gleichung zur Bestimmung von c_1, c_2:

$$\frac{\alpha}{\mu \phi_0} \dot r_0 = c_1 \left(\phi^{\delta/2+1} J_{n+\delta/2}(\phi) \right)'_{\phi=\phi_0} + c_2 \left(\phi^{\delta/2+1} Y_{n+\delta/2}(\phi) \right)'_{\phi=\phi_0} \quad (46)$$

Mit Hilfe der Funktionalgleichungen (Jahnke-Emde-Lösch, 1960)

$$J_\nu(x) Y'_\nu(x) - Y_\nu(x) J'_\nu(x) = \frac{2}{\pi x}$$

$$Z'_\nu(x) = -\frac{\nu}{x} Z_\nu + Z_{\nu-1} = \frac{\nu}{x} Z_\nu - Z_{\nu+1}$$

wo Z_ν irgendeine Zylinderfunktion ist, erhält man für $\delta \geq -2$

$$c_1 = \frac{\pi}{2} \frac{\alpha}{\mu} \phi_0^{-\delta/2} \left\{ \frac{\alpha}{r_0 \phi_0} \left((\delta+2) Y_{\delta/2+1}(\phi_0) - \phi_0 Y_{\delta/2+2}(\phi_0) \right) - \frac{\dot r_0}{\phi_0} Y_{\delta/2+1}(\phi_0) \right\} \quad (47a)$$

$$c_2 = -\frac{\pi}{2} \frac{\alpha}{\mu} \phi_0^{-\delta/2} \left\{ \frac{\alpha}{r_0 \phi_0} \left((\delta+2) J_{\delta/2+1}(\phi_0) - \phi_0 J_{\delta/2+2}(\phi_0) \right) - \frac{\dot r_0}{\phi_0} J_{\delta/2+1}(\phi_0) \right\} \quad (47b)$$

Es wird sich zeigen, daß wir uns auf $\delta \geq -2$ beschränken können. Beachtet man, daß mit den Anfangswerten auch $\phi_0 = \frac{r_0^2 \dot\theta_0}{\alpha}$ bekannt ist, so ist also durch (40) und (47) die Lösung der Bewegungsgleichungen gegeben.

III. Diskussion der Lösungen.

Es unterscheiden sich die Fälle $\delta < -2$ und $\delta \geq -2$. Dies wird physikalisch aus der Gleichung (33) verständlich: Setzt man θ = const also $\theta = 0$ (in zentraler Richtung laufendes Teilchen), so ist (32) erfüllt, und aus (33) wird:

$$\ddot{R} = -\frac{\mu}{R^2} - \frac{(2+\delta)}{R^2}\alpha\dot{R}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\dot{R}$ und integriert sie nach der Zeit, so ergibt sich:

$$\frac{\dot{R}^2(t)}{2} - \frac{\dot{R}(t_0)}{2} = \frac{\mu}{R(t)} - \frac{\mu}{R(t_0)} - (2+\delta)\alpha\int_{t_0}^{t}\frac{\dot{R}^2}{R^2}dt$$

Denkt man sich nun ein Teilchen, das sich von der Sonne entfernt, aber nicht genügend Energie hat, um ins Unendliche zu entkommen, also wieder zum selben R_0 zurückgekehrt ist, für $t=t_1$, so gilt:

$$\frac{\dot{R}^2(t_1)}{2} - \frac{\dot{R}^2(t_0)}{2} = -(2+\delta)\alpha\int_{t_0}^{t}\frac{\dot{R}^2}{R^2}dt$$

Die rechte Seite ist größer Null für $\delta < -2$, d.h. das Teilchen hat Energie gewonnen. Dies erklärt sich so: Das Teilchen wird beim Davonlaufen von den auffallenden Lichtquanten geschoben; gleichzeitig vergrößert es seinen Wirkungsquerschnitt um diesen Energiegewinn auszunutzen. Beim Zurücklaufen wird das Teilchen von den Quanten gebremst; es sieht mehr und energiereichere Quanten als beim Davonlaufen, aber es verkleinert seinen Wirkungsquerschnitt für den Photoneneinfang so stark, daß es im Ganzen doch Energie gewonnen hat. Durch geeignete Wahl seines Einfangquerschnittes für Photonen (das ist ~~praktisch~~ sein geometrischer Querschnitt multipliziert mit der Größe Q_{pr}) kann das Teilchen also dem Strahlungsfeld Energie entziehen. Allgemeiner kann man dies so darstellen:

Die Bewegungsgleichung in Vektorform lauten:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{m\alpha c}{R^2}\left(1-(1+\delta)\frac{v_R}{c}\right) - \frac{m_T M_\odot}{R^2}\right)\vec{R}_0 - \frac{m\alpha\vec{v}}{R^2}$$

wo v_R die Geschwindigkeit und $\vec{R}_0$ den Einheitsvektor in radialer Richtung bedeuten. Multipliziert man beide Seiten mit $\vec{dv}$ und integriert über t, so erhält man:

$$\frac{m}{2}\left(v^2 - v_0^2\right) - m\mu\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right) = -m(1+\delta)\alpha\int_{t_0}^{t}\frac{v_R^2}{R^2}dt - m\alpha\int_{t_0}^{t}\frac{v^2}{R^2}dt$$

oder, wenn man v^2 in $v_R^2 + v_\perp^2$ zerlegt, wo $v_\perp$ die zu R senkrechte Komponente von $\vec{v}$ ist:

$$\frac{m}{2}\left(v^2 - v_0^2\right) - mM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = -m(2+\delta)\alpha\int_{t_0}^{t}\frac{v_r^2}{r^2}\,dt - m\alpha\int_{t_0}^{t}\frac{v_\perp^2}{r^2}\,dt \qquad (48)$$

Für $\delta \geq -2$ ist die rechte Seite rein dissipativ, für $\delta < -2$ tritt ein positives Glied auf, d.h., das Teilchen kann Energie gewinnen, aber nur dann wenn die Bahn nicht zu kreisförmig ist, da sonst $v_r \ll v_\perp$ wird. Außerdem sieht man an (48), daß auch für $\delta < -2$ der Beitrag zu den Integralen auf der rechten Seite im Perihel am größten ist. Da dort aber stets $v_r \ll v_\perp$ gilt, ist nur für ganz extreme Bahnen, bzw. betragsmäßig große, negative δ, eine Umkehrung des Poynting-Robertson-Effektes denkbar, so daß die Teilchen nicht in die Sonne hinein, sondern aus dem Sonnensystem herausspiralen. Bei den zu betrachtenden Beispielen wird sich jedoch ~~stets~~ meist $\delta \geq -2$ ergeben.

Aber selbst im Fall $\delta < -2$ kann es keine nichttrivialen stationären Bahnen geben.

Dies soll zunächst anschaulich gezeigt werden.
Es war $\theta_0 = 0$ gesetzt worden. Ist $\dot\theta_0 > \sigma$, so wächst θ mit t. Dann ist auch $h = r_0^2\dot\theta_0 > \sigma$, also auch $\phi_0 = h/\alpha > \sigma$. $\phi = h/\alpha - \theta$ nimmt also ab und wird null für $\theta = h/\alpha$. Für $\dot\theta_0 < \sigma$ ist $h < \sigma$ und θ wird kleiner bis $\phi = h/\alpha - \theta = \sigma$ wird. Die Unterscheidung in $\dot\theta_0 > \sigma$ und $\dot\theta_0 < \sigma$ trennt nur Bahnen verschiedenen Umlaufssinnes. Es sei in Zukunft stets $\dot\theta_0 > \sigma$, d.h. $\phi_0 > \sigma$ angenommen.
Die Lösungen (40) der Bewegungsgleichungen sind definiert für $\sigma < \phi \leqq \phi_0$. Der Punkt $\phi = \sigma$ als eventuelle singuläre Stelle ist auch physikalisch ausgezeichnet:
Nach (34) ist:

$$\dot\theta - \alpha\frac{h - \theta}{r^2} = \frac{\alpha\phi}{r^2}$$

Für $\phi = \sigma$ ist also der Drehimpuls $r^2\dot\theta$ aufgebraucht. Da die Kraft $F_4 = -\alpha\frac{v_r}{r^2}m = -\alpha m\frac{1}{r^2}r\frac{d\theta}{dt}$, die den Drehimpuls aufzehrt, nur dann wirkt, wenn ein solcher vorhanden ist, muß das Teilchen für $\phi \to \sigma$ entweder

1) in die Sonne hineinfallen oder
2) schon für ein $\phi > \sigma$ ins Unendliche entkommen sein oder
3) die Teilchenbahn muß in eine drehimpulsfreie Bahn, also eine Gerade durch die Sonne einmünden (Abb.2).

Der Fall 3) läßt sich so erledigen:
Aus (34) folgt:

$$T = -\int_{\phi_0}^{0} \frac{R^2(\phi)}{\alpha}\, d\phi \qquad (49)$$

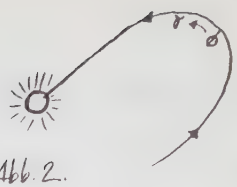


Abb. 2.

wobei T die Zeit ist, die das Teilchen braucht, um den Winkelraum von $\Theta = 0$ bis $\Theta = 2\pi/\alpha$ zu durchlaufen. Gilt $R(\phi) \to R_0 + 0$ für $\phi \to 0$, so ist offenbar $T = \infty$, d.h., das Teilchen braucht unendlich lange um den Fall 3) zu realisieren. Dies wäre eine nichtperiodische, stationäre Bahn. Das ist aber physikalisch nur verständlich, wenn der angestrebte Endzustand kräftefrei ist. Ein Blick auf (32) und (33) lehrt, daß dies möglich ist für $\mu = \mu_0 - \alpha C = 0$, da dann eine triviale Lösung $\Theta = \text{const}$, $R = \text{const}$ existiert. Die nachfolgende Betrachtung der Lösungen lehrt, daß dies auch die einzige Möglichkeit für eine stationäre Bahn ist.

Es soll aus (40) das Verhalten von $1/R$ für $\phi \to 0$ abgeleitet werden. Dabei tritt in jedem Fall ein Glied $\mu C \cdot \ln\phi$ auf, und es kommt darauf an zu zeigen, daß dieses nicht durch passende Wahl der Konstanten beseitigt werden kann.
Wenn man (40) mit μ/α^2 durchmultipliziert erhält man:

$$\frac{1}{R} = C_1' \phi^{\delta/2+1} J_{|1+\delta/2|}(\phi) + C_2' \phi^{\delta/2+1} Y_{|1+\delta/2|}(\phi)$$
$$+ \frac{\pi}{2} \frac{\mu}{\alpha^2} \phi^{\delta/2+1} \left\{ Y_{|1+\delta/2|}(\phi) \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{J_{|1+\delta/2|}(x)}{x^{2+\delta/2}}\, dx - J_{|1+\delta/2|}(\phi) \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{Y_{|1+\delta/2|}(x)}{x^{2+\delta/2}}\, dx \right\} \qquad (50)$$

wobei C_1', C_2' von μ frei sind, wie man aus (45) sehen kann.
Es sei ~~zunächst~~ $|\delta/2+1| > 1$, d.h., $\delta > 0$ od. $\delta < -4$. Dann kann man aus den Definitionen für die Funktionen J_ν, Y_ν entnehmen (Jahnke-Emde-Lösch, 1960):

$$J_{|1+\delta/2|}(\phi) = \gamma_1 \phi^{|\delta/2+1|} + g_1(\phi) \phi^{|\delta/2+1|+2} \qquad (51)$$

$$Y_{|1+\delta/2|}(\phi) = \gamma_2 \left(\frac{1}{\phi}\right)^{|\delta/2+1|} + g_2(\phi) \left(\frac{1}{\phi}\right)^{|1+\delta/2|-2} \qquad (52)$$

Dabei sind γ_1 und $(-\gamma_2)$ positive Konstanten, $g_1(\phi)$ läßt sich als Potenzreihe schreiben: $g_1(\phi) = d_0 + d_1\phi^2 + d_2\phi^4 + \dots$ mit $d_0 \neq 0$, $g_2(\phi)$ ist eine in $0 \leq \phi \leq \phi_0$ stetige Funktion mit $g_2(0) = \gamma_2 \neq 0$

Sei nun $\delta > 0$, d.h., $|1+\delta/2| = 1+\delta/2$; dann gilt nach (50), (51), (52):

$$\frac{1}{R} = c_1'\phi^{\delta/2+1}\left(\gamma_1\phi^{\delta/2+1} + g_1(\phi)\phi^{\delta/2+3}\right) + c_2'\phi^{\delta/2+1}\left(\gamma_2\frac{1}{\phi^{\delta/2+1}} + \frac{g_2(\phi)}{\phi^{\delta/2-1}}\right)$$

$$+ c\frac{u}{\alpha^2}\phi^{\delta/2+1}\left\{\left(\gamma_2\frac{1}{\phi^{1+\delta/2}} + \frac{g_2(\phi)}{\gamma_2\phi^{\delta/2-1}}\right)\int_{\phi_0}^{\phi}\frac{\gamma_1\lambda^{\delta/2+1} + g_1(\lambda)\lambda^{\delta/2+3}}{\lambda^{2+\delta/2}}d\lambda\right.$$

$$\left. - \left(\gamma_1\phi^{\delta/2+1} + g_1(\phi)\phi^{\delta/2+3}\right)\int_{\phi_0}^{\phi}\frac{\gamma_2\lambda^{-\delta/2-1} + g_2(\lambda)\lambda^{-\delta/2+1}}{\lambda^{2+\delta/2}}d\lambda\right\}$$

oder:

$$\frac{1}{R} = c_1'\gamma_1\phi^{\delta+2} + c_1'g_1(\phi)\phi^{\delta+4} + c_2'\gamma_2 + c_2'\phi^2 g_2(\phi)$$

$$+ c\frac{u}{\alpha^2}\left\{\left(\gamma_2 + g_2(\phi)\phi^2\right)\left(\gamma_1^2 \ln\frac{\phi}{\phi_0} + \int_{\phi_0}^{\phi}\lambda g_1(\lambda)d\lambda\right)\right.$$

$$\left. - \left(\gamma_1\phi^{\delta+2} + g_1(\phi)\phi^{\delta+4}\right)\left(\frac{1}{\delta+2}\left[\frac{1}{\phi_0^{\delta+2}} - \frac{1}{\phi^{\delta+2}}\right] + \int_{\phi_0}^{\phi}\frac{g_2(\lambda)}{\lambda^{1+\delta}}d\lambda\right)\right\} \quad (53)$$

Da $g_2(\phi)$ in $0 \leq \phi \leq \phi_0$ stetig, also beschränkt ist - es sei $|g_2(\phi)| \leq \overline{c}_2$ in $0 \leq \phi \leq \phi_0$ - kann man schreiben:

$$\left|\int_{\phi_0}^{\phi}\frac{g_2(\lambda)}{\lambda^{1+\delta}}d\lambda\right| \leq \left|\int_{\phi_0}^{\phi}\frac{\overline{c}_2}{\lambda^{1+\delta}}d\lambda\right| = \overline{c}_2\frac{1}{\delta}\left[\frac{1}{\phi_0^{\delta}} - \frac{1}{\phi^{\delta}}\right]$$

Es ist also offenbar $\left(\gamma_1\phi^{\delta+2}+g_1(\phi)\phi^{\delta+4}\right)\int_{\phi_0}^{\phi}\frac{g_2(x)}{x^{1+\delta}}dx$

beschränkt für $\phi\to 0$. Für kleine ϕ behält man also von (53) übrig:

$$\frac{1}{R}\approx\frac{\mu}{\alpha^2}\gamma_1\gamma_2\ln\frac{\phi}{\phi_0} \qquad (54)$$

Alle anderen Terme stellen beschränkte Funktionen dar.
Sei nun $\delta<-4$, also $|\delta/2+1|=-\delta/2-1$; dann gilt:

$$\frac{1}{R}=c_1'\phi^{\delta/2+1}\left(\gamma_1\phi^{-\delta/2-1}+g_1(\phi)\phi^{-\delta/2+1}\right)+c_2'\left(l_2^0\frac{1}{\phi^{-\delta/2-1}}-\frac{g_2(\phi)}{\phi^{-\delta/2-3}}\right)\phi$$
$$+\frac{\mu}{\alpha^2}\left\{\left(\gamma_2\phi^{\delta+2}+g_2(\phi)\phi^{\delta+4}\right)\int_{\phi_0}^{\phi}\frac{\gamma_1 x^{-\delta/2-1}+g_1(x)x^{-\delta/2+1}}{x^{\delta/2+2}}dx\right.$$
$$\left.-\left(\gamma_1+\phi^2 g_1(\phi)\right)\int_{\phi_0}^{\phi}\frac{l_2^0 x^{\delta/2+1}+g_2(x)x^{\delta/2+3}}{x^{\delta/2+2}}dx\right\}$$

oder

$$\frac{1}{R}=c_1'l_1^0+c_1'g_1(\phi)\phi^2+c_2'\gamma_2\phi^{\delta+2}+c_2'\phi^{\delta+4}g_2(\phi)$$
$$+\frac{\mu}{\alpha^2}\left\{\left(\gamma_2\phi^{\delta+2}+g_2(\phi)\phi^{\delta+4}\right)\left[\frac{\gamma_1}{\delta+2}\left(\frac{1}{\phi^{\delta+2}}-\frac{1}{\phi^{\delta+2}}\right)+\int_{\phi_0}^{\phi}\frac{g_2(x)}{x^{1+\delta}}dx\right]\right.$$
$$\left.-\left(\gamma_1+\phi^2 g_1(\phi)\right)\left(\gamma_2\ln\frac{\phi}{\phi_0}+\int_{\phi_0}^{\phi}g_2(x)\,x\,dx\right)\right\}$$

Wegen $g_1(x)=d_0+d_1x^2+d_2x^4+\ldots$ kann man schreiben:

$$\int_{\phi_0}^{\phi}\frac{g_1(x)}{x^{1+\delta}}dx=\left(d_0'\phi^{-\delta}+d_1'\phi^{-\delta+1}+d_2'\phi^{-\delta+2}+\ldots\right)+\bar{a}_0$$

Man behält also von $\frac{\mu}{\alpha^2}\left(\gamma_2\phi^{\delta+2}+g_2(\phi)\phi^{\delta+4}\right)\int_{\phi_0}^{\phi}\frac{g_1(x)}{x^{1+\delta}}dx$

lediglich den Ausdruck $(\mu/\alpha^2)\left(\gamma_2\phi^{\delta+2}+g_2(\phi)\phi^{\delta+4}\right)\cdot\bar{a}_0$ als singulären Term übrig. Damit erhält man für $\phi\to 0$ unter Vernachlässigung aller beschränkten Terme:

$$\frac{1}{R}\approx c_2'\gamma_2\phi^{\delta+2}+c_2'\phi^{\delta+4}g_2(\phi)+\frac{\mu}{\alpha^2}\left(\gamma_2\phi^{\delta+2}+g_2(\phi)\phi^{\delta+4}\right)\bar{a}_0$$
$$-\frac{\mu}{\alpha^2}\gamma_1\gamma_2\ln\frac{\phi}{\phi_0} \qquad (55)$$

Wegen $q_2(\phi) \to e_2 \neq 0$ für $\phi \to 0$ kann im Falle $\mu \neq 0$ für keine Wahl der Konstanten das logarithmische Glied verschwinden.
Diese beiden Beispiele mögen genügen, insbesondere da auch für $\delta < -4$, wo Energiegewinn auf Teilen der Bahn möglich ist, sich keine stationäre Bahn ergeben hat. Der Verfasser hat den Beweis auf ganz ähnliche Weise auch für die anderen δ-Intervalle geführt mit stets demselben Ergebnis: Es gibt für $\mu \neq 0$ keine stationären Bahnen.

Für $\mu = 0$ können sich bei geeigneter Wahl der Konstanten in der Tat Lösungen mit $R \to R_0 \neq 0$ für $\phi \to \phi_0$ ergeben. Diese sind dann, wie aus (49) folgt, stationäre Lösungen. Sie sind jedoch ohne praktische Bedeutung.
Es soll nun noch ein qualitativer Überblick über eine charakteristische Teilchenbahn gegeben werden.
Es sei $\dot{R}_0 = 0$, $R_0 = 1$ A.E., $R_0 \dot{\Theta}_0^2 = \frac{\mu}{R_0^2}$, d.h. das Teilchen soll Kreisbahngeschwindigkeit haben. Ferner sei $a = 10^{-4}$ cm (Radius des Teilchens), dann entnehmen wir aus Tabelle 2 $\overline{Q}_{pr} \approx 1.3$ und $\delta \approx -0.2$ für ein Teilchen mit dem Brechungsindex n = 1.27 - 1.37i (Eisenteilchen). Mit $\rho = 7.8\,g/cm^3$ folgt dann aus (29)

$$\alpha \approx 4 \cdot 10^{17}\ cm^2/sec$$

$$\phi_0 = \frac{R_0^2 \dot{\Theta}_0}{\alpha} = \frac{R_0^{1/2} \mu^{1/2}}{\alpha} \approx 10^5 \gg 1$$

Außerdem wird noch die Gleichung $\phi_0'^2 = \frac{R_0 \mu}{\alpha^2}$ benutzt,

die aus der Annahme der Kreisbahngeschwindigkeit folgt. (Die folgende Rechnung gilt für $\delta \geq -2$)
Mit Hilfe der Formel: $\int x^{\nu+1} Z_\nu(x)\,dx = x^{\nu+1} Z_{\nu+1}$ (Jahnke-Emde-Lösch, 1960), wo Z_ν eine Zylinderfunktion ist, kann man umformen:

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{J_{1+\delta/2}^{(x)}}{x^{\delta/2}}\,dx = \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{x^{\delta/2+2} J_{1+\delta/2}^{(x)}}{x^{\delta+4}}\,dx = \frac{J_{\delta/2+2}}{x^{\delta/2+2}}\Bigg|_{\phi_0}^{\phi} + (\delta+4) \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{J_{\delta/2+2}}{x^{\delta/2+3}}\,dx \quad (59)$$

Unter Verwendung der Formel: $\int \frac{Z_\nu(x)}{x^{\nu-1}}\,dx = -\frac{Z_{\nu-1}}{x^{\nu-1}}$

kann man das in (59) ganz rechts stehende Integral weiterumformen:

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{J_{\delta/2+2}}{x^{\delta/2+1}}\frac{dx}{x^2} = -\frac{J_{\delta/2+1}}{x^{\delta/2+3}}\Big|_{\phi_0}^{\phi} - 2\int_{\phi_0}^{\phi}\frac{J_{\delta/2+1}}{x^{\delta/2+4}}\,dx$$

Dasselbe kann man mit $\int \frac{Y_{1+\delta/2}}{x^{\delta/2+2}}dx$ machen. Setzt man dies

alles in (41) ein, wobei c_1, c_2 aus (47) genommen werden und benutzt noch die Gleichungen:

$Y_{\nu-1}(x)\,J_\nu(x) - Y_\nu(x)\,J_{\nu-1}(x) = \frac{2}{\pi x}$ und $\phi_0^2 = \frac{R_0\mu}{\alpha^2}$,

so erhält man schließlich:

$$\frac{\alpha^2}{\mu R} = \frac{1}{\phi^2} - \frac{\pi\phi^{\delta/2+1}}{\phi_0^{\delta/2+3}}\left(J_{1+\delta/2}(\phi)\,Y_{1+\delta/2}(\phi_0) - Y_{1+\delta/2}(\phi)\,J_{1+\delta/2}(\phi_0)\right)$$

$$-2(\delta+4)\frac{1}{\phi^4} - \frac{\pi(\delta+4)\phi^{\delta/2+1}}{\phi_0^{4+\delta/2}}\left(J_{1+\delta/2}(\phi)\,Y_{2+\delta/2}(\phi_0) - Y_{1+\delta/2}(\phi)\,J_{2+\delta/2}(\phi_0)\right)$$

$$-\pi(\delta+4)(\delta+6)\phi^{\delta/2+1}\left(Y_{1+\delta/2}(\phi)\int_{\phi_0}^{\phi}\frac{J_{1+\delta/2}\,dx}{x^{\delta/2+5}} - J_{1+\delta/2}(\phi)\int_{\phi_0}^{\phi}\frac{Y_{1+\delta/2}}{x^{\delta/2+5}}dx\right) \quad (60)$$

Benutzt man nun noch die Näherungsformeln: (Jahnke-Emde, 1960):

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right);\quad Y_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{1}{2}\right) \quad (61)$$

so wird aus (60):

$$\frac{\alpha^2}{\mu R} = \frac{1}{\phi^2} - \frac{\phi^{\delta/2+1/2}}{\phi_0^{\delta/2+3/2}}\sin(\phi_0-\phi) + \frac{2(\delta+4)}{\phi^4} + (\delta+4)\frac{\phi^{\delta/2+1/2}}{\phi_0^{\delta/2+3/2}}\cos(\phi-\phi_0)$$

$$-(\delta+4)(\delta+6)\,g(\phi,\phi_0) \quad (62)$$

$g(\phi,\phi_0)$ läßt sich so abschätzen: Die Formeln (61) sind zwar nur Näherungsformeln, jedoch begeht man gewiß keinen Fehler, wenn man für $x > 10^2$ schreibt:

$$|Y_\nu(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi x}}, \quad |J_\nu(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi x}}$$

(mit $\nu \leq 2$, was ja nach Voraussetzung der Fall ist.) Damit wird:

$$|g(\phi,\phi_0)| \leq \frac{\pi}{2}\,\phi^{\delta/2+1}\left|Y_{1+\delta/2}(\phi)\int_{\phi_0}^{\phi}\frac{J_{1+\delta/2}}{x^{5+\delta/2}}\,dx - \frac{J(\phi)}{1+\delta/2}\int_{\phi_0}^{\phi}\frac{Y_{1+\delta/2}}{x^{5+\delta/2}}\,dx\right|$$

oder:

$$|g(\phi,\phi_0)| \leq \frac{16}{|\delta/2+11/2|}\cdot\frac{1}{\phi^4}$$

Nun kann man (62) diskutieren, indem man nur die ersten beiden Glieder mitnimmt. Man sieht: (62) stellt eine Kurve $\frac{\alpha^2}{\mu R} = \frac{1}{\phi^2}$ dar, die für $\phi \to 0$, $R \to \infty$ ergibt, und der leichte Schwankungen überlagert sind, deren Amplituden mindestens um den Faktor $1/\phi_0 \approx 10^{-5}$ kleiner sind als der Wert $1/\phi^2$. Außerdem nehmen für $\delta > -1$ die Amplituden ständig ab (Abb.3). Die Bahn führt

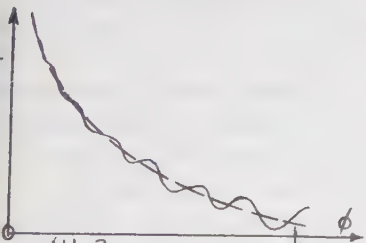


Abb.3.

in einer Spirale in die Sonne hinein, die Zahl Z der Umläufe bis zum Sonnenmittelpunkt ist in guter Näherung $Z = \frac{\phi_0}{2\pi}$. Am Sonnenrand selbst ist: $R_\odot = 0{,}7 \cdot R_{\odot\,cm}$ also $\phi_0 \approx (\mu^{1/2} R_\odot^{1/2})/\alpha \approx 7 \cdot 10^4 \gg 1$, d.h., die Näherung (62) kann noch gut verwendet werden. Verwendet man in der Formel (49) $R^2 \approx \frac{\alpha^4}{\mu^2}\phi^4$ als ~~gute~~ Näherung, und ist $R_\odot = \frac{\alpha^4}{\mu^2}\phi_0^4$, so erhält man für die Zeit des Hineinspiralens bis zum Sonnenrand:

$$T = \frac{R_\odot^2}{4\alpha} \qquad (R_\odot \ll R_\odot)$$

Es ist nicht verwunderlich, daß δ nicht in T eingeht. Es handelt sich ja um fast kreisförmige Bahnen, die sogar immer kreisförmiger werden, für $\delta > -1$, d.h., $v_x \ll v_y$; die Bremsung des Teilchens wird also im wesentlichen von F_y (Gl.(28)) gemacht, während F_x

(Gl.31) fast als reine Potentialkraft wirkt.

Die Näherung, die zu (60), (62) geführt hat, könnte zwar prinzipiell nicht beliebig weit geführt werden, da vor den Integralen Faktoren auftauchen, die mit der Fakultät groß werden. Jedoch ist es sinnvoll sie durchzuführen, solange noch der Vorfaktor des Restgliedes, nämlich $(\delta+4)\cdot 2\cdot(\delta+6)\cdot 4\cdot(\delta+8)\ldots$ klein ist gegen ϕ_0. Für die praktische Rechnung in diesem Fall ist es vernünftig, noch einen Schritt weiter zu integrieren; $g(\phi,\phi_0)$ wird dann klein mit $1/\phi^5$ und die beiden Glieder mit $\sin(\phi_0-\phi)$ und $\cos(\phi_0-\phi)$ ergeben eine Korrektur, die stets wesentlich größer ist als $|g(\phi,\phi_0)|$.

Eine weitere Differenzierung gegenüber dem Fall $\delta=0$ ersieht man ebenfalls aus (62): für $\delta<-1$ nehmen die Amplituden der aufgeprägten Schwingungen nicht ab, sondern zu. Allerdings gilt selbst für den Fall mit kleinstem δ, für den die Formel abgeleitet wurde, nämlich $\delta=-2$, daß das nächstfolgende Apozentrum näher an der Sonne liegt als das vorhergehende, da $1/\phi^2$ schneller zunimmt für kleiner werdende ϕ als $\frac{1}{\phi^{1/2}}\cdot\frac{1}{\phi_0^3}$ der Amplitudenfaktor.

Physikalisch ist dies so zu verstehen: Für sehr große positive δ bestimmt die Energieabnahme das Bewegungsbild, da mit größer werdendem δ der Energieverlust ansteigt, wie man aus Gl.(48) sieht. Die Abnahme des Drehimpulses, die durch Gl.(32) bestimmt ist, wird dadurch nicht beeinflußt. In erster Näherung wird sich die Bahn einem Kreis annähern, weil diese Bahn von allen Bahnen gleichen Drehimpulses die kleinste Energie hat. Für kleine δ tritt die Drehimpulsabnahme in den Vordergrund, es kann ja sogar für $\delta<-4$ wenigstens auf Teilen der Bahn Energie gewonnen werden. Das Teilchen wird sich also zu Bahnen hinbewegen, die sich der Energie nach wenig voneinander unterscheiden, dagegen stark im Drehimpuls. Von allen Ellipsen gleicher Energie, d.h., gleicher großer Halbachse, ist die zur Strecke der Länge 2a entartete Ellipse die Bahn geringsten Drehimpulses (dem Betrage nach), d.h., die Exzentrizität nimmt zu.

IV. Ableitung und angenäherte Lösung der Bedingungsgleichungen für den Einfang der Partikel durch die Sonne.

Da die Teilchen im allgemeinen Energie verlieren, ist es möglich, daß auch Teilchen, die mit einer von Null verschiedenen Geschwindigkeit aus dem Unendlichen kommen, eingefangen werden. Desgleichen können kometarische Partikel, die beim Austritt aus dem Kometen eine größere Geschwindigkeit haben als die Entweichgeschwindigkeit, unter Umständen von der Sonne aufgrund des Poynting-Robertson-Effekts eingefangen werden.
Die Bedingung dafür, daß ein Teilchen "gerade noch entkommt", d.h. daß es mit der Geschwindigkeit $v_\infty = 0$ im Unendlichen ankommt, soll nun formuliert werden.
Es gilt:

$$v^2 = \dot{R}^2 + R^2\dot{\Theta}^2$$

Wegen

$$\dot{\Theta} = \frac{h - \alpha\Theta}{R^2}$$

ist

$$v^2 = \dot{R}^2 + \frac{(h-\alpha\Theta)^2}{R^2} = \dot{R}^2 + \frac{\phi^2\alpha^2}{R^2} \qquad (56)$$

Da ϕ beschränkt bleibt, gilt $v^2 \to \dot{R}^2$ für $R \to \infty$. Nun ist

$$\dot{R} = \frac{dR}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = \frac{dR}{d(1/R)}\frac{d(1/R)}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = -R^2\frac{d(1/R)}{d\phi}\left(-\frac{\alpha d}{R^2}\right) = -\frac{d(1/R)}{d\phi}\alpha\phi$$

Soll das Teilchen gerade noch entkommen, so muß für ein $\phi = \phi_\infty$ gelten:

$$\frac{1}{R(\phi_\infty)} = 0 \;;\; \left(\frac{d(1/R)}{d\phi}\right)_{\phi_\infty} = 0$$

Dies wird aus Abb.4 sofort verständlich.
Mit Gl. (45) liefert dies:

$$\left(C_1 - \frac{\pi}{2}\int_{\phi_0}^{\phi_\infty} \frac{Y_{n+\delta/2,1}}{x^{2+\delta/2}}\,dx\right) J_{n+\delta/2,1}(\phi_\infty)\,\phi_\infty^{\delta/2+1} + \left(C_2 + \frac{\pi}{2}\int_{\phi_0}^{\phi_\infty} \frac{J_{n+\delta/2,1}}{x^{2+\delta/2}}\,dx\right) Y_{n+\delta/2,1}(\phi_\infty)\,\phi_\infty^{\delta/2+1} = 0$$

$$\left(C_1 - \frac{\pi}{2}\int_{\phi_0}^{\phi_\infty} \frac{Y_{n+\delta/2,1}}{x^{2+\delta/2}}\,dx\right)\left(J_{n+\delta/2,1}(\phi)\,\phi^{\delta/2+1}\right)'_{\phi=\phi_\infty} + \left(C_2 + \frac{\pi}{2}\int_{\phi_0}^{\phi_\infty} \frac{J_{n+\delta/2,1}}{x^{2+\delta/2}}\,dx\right)\left(Y_{n+\delta/2,1}(\phi)\,\phi^{\delta/2+1}\right)'_{\phi=\phi_\infty} = 0$$

Dies ist ein Gleichungssystem zur Bestimmung der beiden Klammerausdrücke, d.h., der Anfangswerte, die ja in c_1, c_2 und ϕ_0 stecken.

Die Determinante des Systems ist:

$$\mathfrak{D} = \phi_\infty^{\delta/2+1}\left\{ J_{1+\delta/2,1}(\phi_\infty)\left(Y_{1+\delta/2}\cdot\phi^{1+\delta/2}\right)' - Y_{1+\delta/2}(\phi_\infty)\left(J_{1+\delta/2}\,\phi^{1+\delta/2}\right)'\right\}_{\phi=\phi_\infty} = \frac{2}{\pi}\phi_\infty^{1+\delta} \neq 0$$

Also müssen die beiden Klammern verschwinden:

$$C_1 = \frac{\pi}{2}\int_{\phi_0}^{\phi_\infty}\frac{Y_{1+\delta/2,1}}{x^{\delta/2+2}}\,dx\,, \quad C_2 = -\frac{\pi}{2}\int_{\phi_0}^{\phi_\infty}\frac{J_{1+\delta/2,1}}{x^{\delta/2+2}}\,dx \qquad (63)$$

Die Größen c_1; c_2 entnimmt man aus Gleichung (47). Dann ist ($\delta \geq -2$)

$$\frac{\pi}{2}\frac{\alpha}{\mu}\phi_0^{-\delta/2}\left\{\frac{\alpha}{R_0\phi_0}\left((\delta+2)Y_{\delta/2+1}(\phi_0) - \phi_0 Y_{\delta/2+2}(\phi_0)\right) - \frac{\dot R_0}{\phi_0}Y_{\delta/2+1}(\phi_0)\right\} = \frac{\pi}{2}\int\frac{Y_{1+\delta/2}}{x^{\delta/2+2}}\,dx$$

$$-\frac{\pi}{2}\frac{\alpha}{\mu}\phi_0^{-\delta/2}\left\{\frac{\alpha}{R_0\phi_0}\left((\delta+2)J_{\delta/2+1}(\phi_0) - \phi_0 J_{\delta/2+2}(\phi_0)\right) - \frac{\dot R_0}{\phi_0}J_{\delta/2+1}(\phi_0)\right\} = -\frac{\pi}{2}\int\frac{J_{1+\delta/2}}{x^{\delta/2+2}}\,dx$$

Daraus folgt durch Auflösung: ϕ_∞

$$\frac{1}{R_0} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\mu}{\alpha^2}\right)\phi_0^{\delta/2+1}\left(J_{1+\delta/2}(\phi_0)\int_{\phi_0}^{\phi_\infty}\frac{Y_{1+\delta/2}}{x^{2+\delta/2}}\,dx - Y_{1+\delta/2}(\phi_0)\int_{\phi_0}^{\phi_\infty}\frac{J_{1+\delta/2}}{x^{2+\delta/2}}\,dx\right) \qquad (65)$$

$$\dot R_0 = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)\phi_0^{\delta/2+1}\left\{\left[(\delta+2)J_{\delta/2+1}(\phi_0) - \phi_0 J_{\delta/2+2}(\phi_0)\right]\cdot\int_{\phi_0}^{\phi_\infty}\frac{Y_{1+\delta/2}}{x^{2+\delta/2}}\,dx\right.$$

$$\left. - \left[(\delta+2)Y_{\delta/2+1}(\phi_0) - \phi_0 Y_{\delta/2+2}(\phi_0)\right]\cdot\int_{\phi_0}^{\phi_\infty}\frac{J_{1+\delta/2}}{x^{2+\delta/2}}\,dx\right\} \qquad (66)$$

Diese Gleichungen sind so zu verstehen: Aus (65) errechnet man ϕ_∞ und setzt dies in (66) ein. Dann hat man einen Zusammenhang zwischen $\dot R_0, R_0, \phi_0$, der angibt, welche Teilchen gerade noch entkommen. Nun hat (65) bei vorgegebenem ϕ_0 etwa ($\phi_0/2\pi$) Lösungen $\phi_\infty \geq \phi_0$. Es interessieren jedoch nur die beiden ϕ_0 nächstliegenden. Diese liefern ein $\dot R_{01} > 0$ und ein $\dot R_{02} < 0$, so daß Teilchen mit $\dot R_{01} < \dot R_0 < \dot R_{02}$ im Sonnensystem verbleiben, alle anderen jedoch entkommen. Abb. 4 macht dies anschaulich klar. Die anderen Lösungen ϕ_∞ gehören zu Teilchen, bevor sie das Unendliche gerade noch berühren, schon im Unendlichen waren (ausgehend von ϕ_0). (Abb. 5) Diese anschauliche Ausführung möge genügen, ein exakter Beweis wäre sehr langwierig.

Man kann auch so sagen: hält man in (65) und (66) ϕ_0 ~~die-~~ ~~ses~~ fest, so ist (65),(66) eine Parameterdarstellung einer Kurve in einem $(r_0, \dot r_0)$-System mit ϕ_∞ als laufendem Parameter, ϕ_0 ~~dieses~~ ist ein fester Parameter. (Abb.6) Alle Bahnen mit Anfangswerten $(r_0, \dot r_0, \phi_0)$, die innerhalb der zu ϕ_0 gehörigen birnenförmigen Kurve liegen, führen in die Sonne hinein, alle übrigen ins Unendliche. Im Kepler-Fall kann man den entsprechenden Zusammenhang ganz ähnlich darstellen. Es gilt dort für Teilchen, die gerade noch entkommen:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = m \frac{\mu}{r_0} \qquad (67)$$

mit $\mu = \mu_0 - \alpha$. Das bedeutet, daß die Wirkung der Sonnenstrahlung auf den reinen Strahlungsdruck beschränkt sein soll. Mit

$$v_0^2 = \dot r_0^2 + r_0^2 \dot\theta_0^2$$

erhält man:

$$\dot r_0 = \pm \sqrt{\frac{2\mu}{r_0} - r_0^2 \dot\theta_0^2} = \pm \sqrt{\frac{2\mu}{r_0} - \frac{r_0^4 \dot\theta_0^2}{\alpha^2 r^2} \alpha^2} = \pm \sqrt{\frac{2\mu}{r_0} - \frac{\phi_0 \alpha^2}{r_0^2}} \qquad (68)$$

Dies ergibt in Abb. 6 die gestrichelte Kurve. Es ist natürlich nicht üblich, den einfachen Zusammenhang (67) durch den umständlichen Ausdruck (68) zu ersetzen. Im Poynting-Robertson-Fall ist es jedoch nicht einmal möglich, den Parameter ϕ_∞ zu eliminieren.

Die wesentlichen Unterschiede zwischen der gestrichelten und der ausgezogenen Kurve sind: Die ausgezogene Kurve ist etwas aufgebläht gegenüber der gestrichelten, sie ist unsymmetrisch im Gegensatz zur gestrichelten, insbesondere geht sie auf den negativen

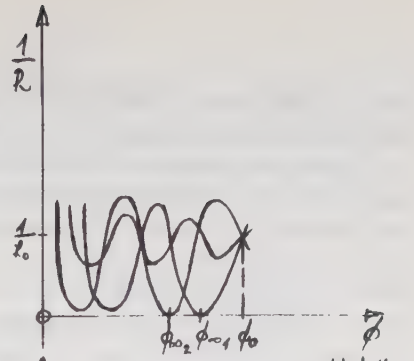


Abb4.

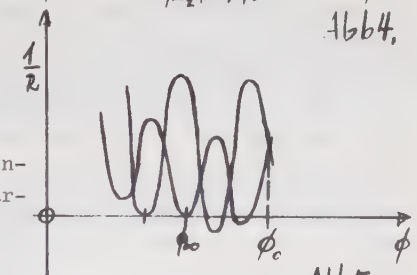


Abb 5.

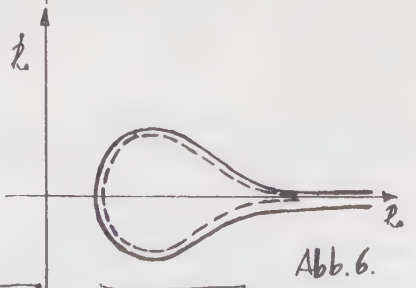


Abb. 6.

Zweig nicht gegen 0 für $\dot{r}_\infty \to \infty$. Gerade dieser asymptotische Grenzwert ist der Gegenstand der folgenden Rechnung.

Die Gleichungen (65) und (66) sollen nun näherungsweise gelöst werden, und zwar nur für den Fall $1/r_0 = \vartheta$. Die Lösung wird dann gerade die Frage nach dem Einfang interstellarer Staubpartikel durch die Sonne beantworten.

Der Gedankengang ist der folgende: Um (69) nach ϕ_∞ aufzulösen, setzt man $\phi_\infty = \phi_0 - 2\pi - \Delta\phi$. (fast parabelförmige Bahn für Teilchen, die gerade noch entkommen) Durch Einsetzen der asymptotischen Entwicklungen für die Besselfunktionen erhält man eine Reihe $\Delta\phi = \frac{a_1}{\phi_0^n} + \frac{a_2}{\phi_0^{n+1}} + \dots$, die allerdings nur anfangs konvergent ist, da die eingesetzten asymptotischen Reihen es auch sind. Dies bedeutet, daß, wenn man, wie wir es tun werden, nur das erste Glied $\Delta\phi = \frac{a_1}{\phi_0^n}$ benutzt, man sich Rechenschaft über die Größe der restlichen Glieder ablegen muß. $\phi_\infty = \phi_0 - 2\pi + \Delta\phi$ setzt man dann in (66) ein, und erhält so $\dot{r}_{\infty} = \dot{r}_0(\alpha, \phi_0, \delta)$. Dann wird jedes Teilchen mit $\dot{r}_\infty < \dot{r}_0 \le 0$ von der Sonne eingefangen.

Es war

$$\phi_0 = \frac{r_0^2 \dot{\theta}_0}{\alpha}$$

oder

$$\phi_0 = \frac{p\vartheta}{\alpha} \qquad (71)$$

Dabei ist p der Stoßparameter, mit dem das Teilchen aus dem Unendlichen auf die Sonne zuläuft, ϑ der Betrag seiner Anfangsgeschwindigkeit.

Es wird sich zeigen, daß wir nur mit Teilchen mit $p \ge 10^{12}$ cm zu rechnen haben. Mit $\vartheta = 20$ km/sec (Pekuliargeschwindigkeit der Sonne) und $\alpha \approx 4 \cdot 10^{14}$ cm³/sec (d. h. abs. Teilchen mit $a \approx 10^{-4}$ cm) folgt

$\phi_0 \approx 5 \cdot 10^3 \gg 1$. Da in den hier vorkommenden Fällen $-2 \le \delta \le 4$ gilt, ist also der Index der vorkommenden Besselfunktionen klein gegen das Argument. Dann gilt (Jahnke-Emde-Lösch):

$$J_{1+\delta/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\cos(x-\beta_1)\left(1+\frac{g_1(x)}{x^2}\right) - \sin(x-\beta_1)\left(\frac{\delta^2+4\delta+3}{8x} + \frac{g_2(x)}{x^3}\right)\right) \quad (7$$

$$Y_{1+\delta/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\sin(x-\beta_1)\left(1+\frac{g_1(x)}{x^2}\right) + \cos(x-\beta_1)\left(\frac{\delta^2+4\delta+3}{8x} + \frac{g_2(x)}{x^3}\right)\right) \quad (7$$

Dabei ist $\delta_1 = (1+\delta/2)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, $|g_1(x)| \le 8$, $|g_2(x)| \le 4$ für $-2 \le \delta \le 4$. Um Schreibarbeit zu sparen, wählt man ϕ_0 so, daß $\cos(\phi_0 - \delta_1) = 0$, $\sin(\phi_0 - \delta_1) = 1$ wird. (Man kann sich leicht am Gang der Rechnung überzeugen, daß dies keinerlei Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet.) Dann ergibt sich:

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{J_{1+\delta/2}}{x^{2+\delta/2}}\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin(\phi-\delta_1)}{\phi^{5/2+\delta/2}} - \frac{1}{\phi_0^{5/2+\delta/2}} - \frac{17-\delta^2}{8}\frac{\cos(\phi-\delta_1)}{\phi^{7/2+\delta/2}}\right.$$

$$\left. - \frac{(\delta+7)(17-\delta^2)}{2\cdot 8}\left(\frac{\sin(\phi-\delta_1)}{\phi^{9/2+\delta/2}} - \frac{1}{\phi_0^{9/2+\delta/2}}\right) + \frac{g_3(\phi)}{\phi^{9/2+\delta/2}}\right) \quad \text{mit } |g_3(\phi)| \le 20\pi \tag{74}$$

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{Y_{1+\delta/2}}{x^{2+\delta/2}}\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\frac{\cos(\phi-\delta_1)}{\phi^{5/2+\delta/2}} - \frac{(17-\delta^2)}{8}\left(\frac{\sin(\phi-\delta_1)}{\phi^{7/2+\delta/2}} - \frac{1}{\phi_0^{7/2+\delta/2}}\right)\right.$$

$$\left. \frac{(7+\delta)}{2}\frac{(17-\delta^2)}{8}\frac{\cos(\phi-\delta_1)}{\phi^{9/2+\delta/2}} + \frac{g_4(\phi)}{\phi^{9/2+\delta/2}}\right) \quad \text{mit } |g_4(\phi)| \le 20\pi \tag{75}$$

(72), (73), (74), (75) in (69) eingesetzt (linke Seite null) ergibt unter Verwendung von $\sin(\phi_0 - \delta_1 - 2\pi + \Delta\phi) \approx 1 - \frac{(\Delta\phi)^2}{2}$, $\cos(\phi_0 - \delta_1 - 2\pi + \Delta\phi) \approx -\Delta\phi$ und nachdem mit $\phi_\infty^{5/2+\delta/2} = (\phi_0 - 2\pi + \Delta\phi)^{5/2+\delta/2}$ durchmultipliziert wurde:

$$\left(1 - \frac{g_1(\phi_0)}{\phi_0^2}\right)\left\{1 - \frac{(\Delta\phi)^2}{2} - \left(\frac{\phi_0 - 2\pi + \Delta\phi}{\phi_0}\right)^{5/2+\delta/2} + \frac{(17-\delta^2)}{8}\frac{\Delta\phi}{\phi_0 - 2\pi + \Delta\phi}\right.$$

$$\left. - \frac{(\delta+7)\cdot(17-\delta^2)}{2\cdot 8}\left[\frac{1-(\Delta\phi)^2}{(\phi_0-2\pi+\Delta\phi)^2} - \frac{(\phi_0-2\pi+\Delta\phi)^{5/2+\delta/2}}{\phi_0^{9/2+\delta/2}}\right] + \frac{g_3(\phi)}{(\phi_0-2\pi+\Delta\phi)^2}\right\}$$

$$= \left(-\frac{\delta^2+4\delta+3}{8}\frac{1}{\phi_0} - \frac{g_2(\phi_0)}{\phi_0^3}\right)\left\{+\Delta\phi - \frac{(17-\delta^2)}{8}\left[\frac{1-(\Delta\phi)^2}{\phi_0-2\pi+\Delta\phi} - \right.\right.$$

$$\left.\left. \frac{(\phi_0-2\pi+\Delta\phi)^{5/2+\delta/2}}{\phi_0^{7/2+\delta/2}}\right] - \frac{(7+\delta)(17-\delta^2)\cdot\Delta\phi}{2\cdot 8}\frac{}{(\phi_0-2\pi+\Delta\phi)^2} + \frac{g_4(\phi)}{(\phi_0-2\pi+\Delta\phi)^2}\right\} \tag{76}$$

Nimmt man in (76) nur die unterstrichenen Glieder mit, so erhält man:

$$1-\frac{(\Delta\phi)^2}{2}-\left(1-\frac{2\pi-\Delta\phi}{\phi_0}\right)^{5/2+\delta/2}+\frac{(17-\delta^2)}{8}\frac{\Delta\phi}{\phi_0}\left(\frac{1}{1-\frac{2\pi-\Delta\phi}{\phi_0}}\right)$$

$$=-\frac{\delta^2+4\delta+3}{8}\frac{\Delta\phi}{\phi_0} \qquad (76a)$$

oder:

$$1-\frac{(\Delta\phi)^2}{2}-\left(1-\frac{(5+\delta)}{2}\frac{2\pi-\Delta\phi}{\phi_0}+\frac{(5+\delta)}{2}\frac{(3+\delta)}{4}\frac{(2\pi-\Delta\phi)^2}{\phi_0^2}-+\ldots\right)$$

$$+\frac{17-\delta^2}{8}\frac{\Delta\phi}{\phi_0}\left(1+\frac{2\pi-\Delta\phi}{\phi_0}\right)=-\frac{\delta^2+4\delta+3}{8}\frac{\Delta\phi}{\phi_0} \qquad (77)$$

Nimmt man wieder nur die vollunterstrichenen Glieder mit, so ergibt sich:

$$-\frac{(\Delta\phi)^2}{2}+\frac{(5+\delta)}{2}\frac{2\pi}{\phi_0}=0 \qquad (77a)$$

oder

$$\Delta\phi=+\sqrt{\frac{(5+\delta)2\pi}{\phi_0}} \qquad (78)$$

Das Pluszeichen in (78) ($\Delta\phi>0$) wird noch erklärt werden. Eine Fehlerbetrachtung zeigt, daß Gleichung (77a) ersetzt werden muß durch:

$$-\frac{(\Delta\phi)^2}{2}+\frac{5+\delta}{2}\frac{2\pi}{\phi_0}\left(1+\frac{g_5(\phi_0)}{\phi_0}\right)=0 \qquad (78a)$$

wobei $|g_5(\phi_0)|<20$ für $4\geq\delta\geq-2$ ist. Dies heißt, daß $\Delta\phi$ durch (78) für $\phi_0\geq10^3$ auf mindestens 1,5% genau angegeben wird. Der Hauptanteil des Fehlers in (78a), nämlich 1,2% rührt von dem in (77) gestrichelt unterstrichenen Glied her, der zweitgrößte Anteil von $g_5(\phi)$ (etwa 3‰), in den restlichen 5‰ lassen sich die übrigen Fehler, einschließlich dessen, der durch die Ersetzung von cos, und sin, durch $\Delta\phi$ bzw. $1-\frac{(\Delta\phi)^2}{2}$ herrührt, unterbringen.

Um $\dot{\ell}_o$ zu berechnen, rechnet man zunächst aus (65) mit $1/\ell_o = 0$ aus:

$$\int_{\phi_o}^{\phi_\infty} \frac{\mathcal{F}_{1+\delta/2}}{x^{2+\delta/2}}\,dx = \frac{\mathcal{F}_{1+\delta/2}(\phi_o)}{\mathcal{V}_{1+\delta/2}(\phi_o)} \int_{\phi_o}^{\phi} \frac{\mathcal{V}_{1+\delta/2}}{x^{2+\delta/2}}\,dx \qquad (79)$$

Setzt man dies in (66) ein, so ergibt sich:

$$\dot{\ell}_o = \frac{\pi}{2}\frac{\mu}{\alpha}\phi_o^{\delta/2+1}\left\{\left[(\delta+2)\mathcal{F}_{\delta/2+1}(\phi_o) - \phi_o \mathcal{F}_{\delta/2+2}(\phi_o)\right] - \left[(\delta+2)\mathcal{V}_{\delta/2+1}(\phi_o) - \phi_o \mathcal{V}_{\delta/2+2}(\phi_o)\right]\frac{\mathcal{F}_{1+\delta/2}(\phi_o)}{\mathcal{V}_{1+\delta/2}(\phi_o)}\right\}\int_{\phi_o}^{\phi}\frac{\mathcal{V}_{1+\delta/2}}{x^{2+\delta/2}}\,dx$$

oder:

$$\dot{\ell}_o = \frac{\pi}{2}\frac{\mu}{\alpha}\frac{\phi_o^{\delta/2+1}}{\mathcal{V}_{1+\delta/2}(\phi_o)}\left\{-\frac{2}{\pi}\right\}\int_{\phi_o}^{\phi_\infty}\frac{\mathcal{V}_{1+\delta/2}}{x^{2+\delta/2}}\,dx$$

Das Integral ist der Ausdruck (75) für $\phi = \phi_\infty$. Nimmt man davon nur den ersten Term und entnimmt $\cos(\phi_\infty - \beta_1) = \cos(\phi_o - \beta_1 - 2\pi + \Delta\phi) \approx -\Delta\phi$ aus (78), so erhält man:

$$\dot{\ell}_o = -\frac{\mu}{\alpha}\frac{\phi_o^{\delta/2+1}\,\Delta\phi}{\mathcal{V}_{1+\delta/2}(\phi_o)\,\phi^{\delta/2+\delta/2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}} = -\frac{\mu}{\alpha}\sqrt{(\delta+2)2\pi}\,\frac{\phi_o^{\delta/2+1/2}}{\phi^{\delta/2+\delta/2}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\mathcal{V}_{1+\delta/2}(\phi_o)} \qquad (80)$$

Hier wird klar, warum in (78) die positive Wurzel genommen wurde; $\dot{\ell}_o$ muß natürlich negativ sein, damit das Teilchen überhaupt aus dem Unendlichen ins Endliche kommt (Abb. 5). Mit $\mathcal{V}_{1+\delta/2}(\varphi_o) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\phi_o}}$ aus (73) und $\phi - \phi_o = -2\pi + \Delta\phi$ erhält man aus (80) in erster Näherung:

$$\dot{\ell}_o = -\frac{\mu}{\alpha}\sqrt{(\delta+2)2\pi}\,\frac{1}{\phi_o^{\delta/2}}$$

Aus (56) erhält man $\dot{\ell}_o = -v$. Mit (71) folgt weiter:

$$v = \frac{\mu}{\alpha}\sqrt{(\delta+2)2\pi}\cdot\frac{1}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^{3/2}}$$

Löst man nach p auf und schreibt statt p p_{PR}, so erhält man:

$$p_{PR} = \left((\delta+2)2\pi\right)^{1/3}\frac{\mu^{2/3}\alpha^{1/3}}{v^{5/3}} \qquad (81)$$

Die Genauigkeit von (81) kann für $\phi_0 \geq 10^3$ mit mindestens 1,5% angegeben werden. (81) ist so zu verstehen: Kommt ein bestimmtes Teilchen vom Radius a_1 aus dem Unendlichen mit der Geschwindigkeit v_1 und dem Stoßparameter p_1, so berechne man zunächst das zu a_1 gehörige α_1 und δ_1 gemäß den Definitionsgleichungen (29) und (18). Ist p_1 dann größer als das aus (81) mit den Größen $\mu_1 = \mu_0 - \alpha c_1, \delta_1, \theta_1$ errechnete p_{PR}, so erreicht das Teilchen das Unendliche wieder, andernfalls wird es von der Sonne eingefangen.

V. Anwendung der Formel (81).

Für $Q_{pr} \equiv 1$, also $\delta \equiv \theta$ kann (81) mit den Ergebnissen von Best und Patterson (1962) verglichen werden, die auf ganz andere Weise gewonnen wurden. Diese Autoren haben die Gl. (36) linearisiert, und dann längs der geschlossen darstellbaren Bahnen den Energieverlust numerisch berechnet, bis die Gesamtenergie negativ wurde. Trat dies vor einem heliozentrischen Abstand von $6{,}7.10^4$ A.E. (nach Periheldurchgang) nicht ein, so nahmen sie an, daß das Teilchen ins Unendliche entkomme. Der große numerische Aufwand, den die Autoren trieben, kann umgangen werden, indem man in (81) $Q_{pr} \equiv 1$ setzt; dann ergibt sich mit (29):

$$\alpha = \frac{2.57.10^{11}}{a\rho} \quad \text{cm}^2/\text{sec}$$

$$p_{PR} = (108)^{1/3} \frac{\left(1.32.10^{22} - 2.57.10^{11} c/a\rho\right)^{2/3} \cdot \left(\frac{2.57.10^{11}}{a\rho}\right)^{1/3}}{v^{5/3}} \quad \text{cm} \qquad (82)$$

Gl. (82) stellt im doppeltlogarithmischen Maßstab, solange $\mu \approx \mu_0$ bleibt, einfach eine Gerade mit der Steigung - 1/3 dar. Wenn dagegen $\alpha c \approx \mu_0$ wird, biegt die durch (82) dargestellte Kurve nach unten ab. Abb. 7 zeigt die von Best und Patterson gewonnenen Kurven ausgezogen und die durch (82) dargestellten gestrichelt. Als Parameter ist v in cm/sec angeschrieben. Bei $\log a\rho = -4.2$ ist $\mu = 0.12\,\mu_0$, d.h. der Strahlungsdruck erreicht fast 90% der Gravitation. Zur Genauigkeit war gesagt worden: Soweit $\phi_0 \geq 10^3$ ist, ist (82) höchstens mit einem Fehler von 1,5% behaftet. Im logarithmischen Maßstab bedeutet dies eine Verschiebung

um weniger als log (1.015)≈0.007, bzw. |log (0.985)|≈0.007 nach oben bzw. nach unten. Dies ist in Abb. 8 nicht mehr zu erkennen. Die Bedingung $\phi_0 \geq 10^3$ kann in Abb. 7 so dargestellt werden: Nach Gl. (71) gilt

$$\frac{pv}{\alpha} = \phi_0$$

Also

$$\frac{pv}{\alpha} \geq 10^3$$

oder

$$\log p \geq 3 + \log 2.5 \cdot 10^{11} - \log a\varrho - \log 2 \cdot 10^6 \qquad (83)$$

dabei wurde v = 2.10^6 cm/sec gesetzt. Setzt man das Gleichheitszeichen, so erhält man die Gerade

$$\log p = 8.10 - \log a\varrho$$

und man kann nun sagen: soweit in Abb. (7) die zu v = 2.10^6 cm/sec gehörige gestrichelte Kurve über der strichpunktierten Geraden (84) verläuft, stellt sie den gesuchten Zusammenhang zwischen p_{PR} und $a\varrho$ bis auf einen Fehler von 1,5% dar. Läßt man einen Fehler von 3% zu, so braucht nurmehr $\phi_0 \geq 5 \cdot 10^2$ zu sein, dann erhält in Abb.7 die ausgezogene Gerade als Fehlergrenzkurve, über der die gestrichelte Kurve mit v = 2.10^6 cm/sec dann im ganzen Bereich verläuft. Für kleinere v verschiebt sich die Fehlergrenzgerade mit log v nach oben, die Kurve (82) jedoch mit 5/3x log v, d.h., für kleinere v wird die Genauigkeit größer. Die Abweichung der gestrichelten und der ausgezogenen Kurven in Abb.7 treten für große $a\varrho$ auf, wo der zu erwartende Effekt klein ist, und bei solchen $a\varrho$, die nahe an der Grenze $\alpha = \mu_0$ liegen. Auch dort wird der Effekt klein, da die Teilchen wegen der durch den Strahlungsdruck verminderten Gravitation nicht mehr so nahe an die Sonne herankommen. Dort geschieht jedoch nach (48) der Hauptenergieverlust; diese Überlegung erklärt auch den Gesamtverlauf der Kurven. Jedenfalls sieht man, daß für den interessierenden Fall v = 20 km/sec die gestrichelte und die ausgezogene Kurve recht gut übereinstimmen.

Zunächst soll nun (81) für Eisenteilchen und Teilchen von ähnlichem Brechungsindex, also absorbierende Teilchen ausgewertet werden.

Dazu benötigt man Q_{pr} (x), das für Eisenteilchen in Tabelle 3 bzw. Abb.8, für Teilchen von ähnlichem Brechungsindex in Abb.8

und für Nickelteilchen in Abb.10 im Vergleich mit Eisen dargestellt ist.

Die notwendigen Rechnungen wurden mit Hilfe eines Algol-Programmes auf dem Siemens-Digitalrechner 2002 des Rechenzentrums der Universität Tübingen durchgeführt. Der Formelapparat ist im allgemeinen der von Giese (1961) verwendete, das Programm wurde denselben Prüfungen unterworfen wie das Programm von Giese (1961), und die Genauigkeit beträgt wie dort mindestens 0,5%, ist aber wahrscheinlich wesentlich größer.

Q_{pr} (x) für Eisenteilchen wurde schon von v.d.Hulst (1946) angegeben. Hier wurde jedoch mit kleinerer Schrittweite ($\Delta x = 0.25$) und bis zu größeren x ($0.1 \leq x \leq 40$) gerechnet. Für noch größere x wurde nach dem Vorgang von van de Hulst (1946) Q_{pr} als Funktion von y = 1/x dargestellt. Es ist dann eine fast lineare Interpolation zwischen den Werten y = 0.025 (x = 40) und $y \doteq 0$ ($x \doteq \infty$) möglich, der Wert von Q_{pr} für y = 0 wurde von v.d.Hulst (1946) zu $Q_{pr} = 0{,}95$ errechnet. Die Möglichkeit der fast linearen Interpolation für große x, d.h. große Teilchen, führt nach v.d.Hulst daher, daß man sich im Bereich der geometrischen Optik befindet. Die dort bei dielektrischen Teilchen noch auftretenden Schwankungen von Q_{pr} rühren von der Interferenz der gebeugten mit den durch das Teilchen durchgehenden Lichtstrahlen her. Die letzteren gibt es bei großen absorbierenden Teilchen jedoch nicht.

Durch numerische Vergleiche kann man zeigen, daß man Q_{pr} von x folgendermaßen darstellen kann:

$$Q_{pr} = 1.752 - 3.80\left(\frac{2\pi a\nu}{c} - 1\right)^2 \quad \text{für} \quad 0.5 \leq x = \frac{2\pi a}{\lambda} \leq 1.2 \qquad (85)$$

mit einem Fehler, der im allgemeinen beträchtlich unter 5% liegt (Abb.8a), und

$$Q_{pr} = k_1 + k_2 y = k_1 + \frac{k_2 c}{2\pi a\nu} \qquad (86)$$

in geeigneten Intervallen mit $x = \frac{2\pi a\nu}{c} \geq 1.2$ (d.h., man wählt in Abb.8b bzw. 8c eine geeignete Sehne oder Tangente als Näherungskurve). Es ergibt sich, daß man mit drei solchen Intervallen auskommt, wenn man zur Bestimmung von Q_{pr} über das Sonnenspektrum von 2500 Å - 25000 Å integriert, und sich dabei mit einem maximalen Fehler von 3% in Q_{pr} zufrieden gibt. Für $x_5 \geq 10$

kann man sich mit einem Fehler von 10 % begnügen, da in(81) $\mu \approx \mu_0$ wird und $\overline{Q}_{pr}$ nur noch mit der 3.Wurzel in p_{PR} eingeht. Um das nach (26) definierte $\overline{Q}_{pr}$ zu bekommen, entnimmt man dem Handbuch der Physik LII (1958) eine Intervalleinteilung, so daß in jedem Teilintervall I_λ durch eine lineare Funktion von λ hinreichend genau dargestellt werden kann. (Es wurden dabei die Messungen von Abbot verwendet, die unterhalb von 3000 Å durch einen linearen Abfall ergänzt wurden; dies ist möglich, da auf das Intervall $0 \leq \lambda \leq 3000$ Å nur 1.5 % der Gesamtintensität entfallen.) Für diese Intervalle kann man aus einer von F.S.Johnson angegebenen Tabelle $\int I_\lambda d\lambda$, erstreckt über die einzelnen Intervalle, entnehmen. In den dann gemäß (85) und (86) auftretenden Integralen:

$$\int \frac{I_\nu}{\nu} d\nu = \frac{1}{\nu_1} \int I_\nu d\nu \,, \quad \int \frac{I_\nu}{\nu^2} d\nu = \frac{1}{\nu_2^2} \int I_\nu d\nu \,, \text{ u.s.w.}$$

usw., kann für ν_1, ν_2 u.s.w. der arithmetische Mittelwert aus den Intervallgrenzen genommen werden. Die Bestimmung von δ ist wenig kritisch: da sich ergibt $-0.5 \leq \delta \leq 0$, δ aber nur in der Form $(5+\delta)^{1/3}$ in die Größe p_{PR} eingeht, erzeugt ein Fehler von 50 % in δ lediglich einen Fehler von 1.7 % in p_{PR}. δ kann deshalb einfach durch Ableiten von (85) und (86) und durch Einsetzen dieser Ableitungen in (18) bestimmt werden. Die sich für n = 1.27 - 1.37i ergebenden $\overline{Q}_{pr}$ und δ sind in der folgenden Tabelle eingetragen:

Tabelle 2: $\overline{Q}_{pr}$, δ für n = 1.27 - 1.37i in Abhängigkeit von log(a). a Teilchenradius in cm.

log(a)	x_5	$\overline{Q}_{pr}$	δ	log(a)	x_5	$\overline{Q}_{pr}$	δ
-4.70	2.5	2.50	-0.09	-4.40	5.0	1.75	-0.28
-4.62	3.0	2.13	-0.29	-4.20	8.0	1.52	-0.24
-4.50	2.0	2.00	-0.32	-4.10	10	1.44	-0.23

Für $x_5 > 15$ kann $\overline{Q}_{pr} \approx 0.96 + \frac{3.2}{x_5}$, $\delta = \frac{-1}{0.3x_5+1}$ ((23)) gesetzt werden. Die mit diesen und den dazwischenliegenden durch lineare Interpolationen gewonnenen $\overline{Q}_{pr}$ errechneten μ enthalten einen Fehler von

höchstens 10 %. Für $x = 3.0$ ist $\mu \approx \frac{\mu_\infty}{2}$, d.h., p_{PR} enthält einen Fehler von etwa 20 %. Für größere x wird dieser Stellenverlustfehler rasch kleiner. In Abb.(11) können dann die gestrichelten Kurven als zwar sehr grobe, im folgenden jedoch ausreichende Fehlergrenzkurven genommen werden. Es ergibt sich dann die Abb. (11), die den Logarithmus des Einfang-Stoßparameters p_{PR} in Abhängigkeit vom Logarithmus des Teilchenradius für Eisenteilchen zeigt.

Es wurde nicht die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Wellenlänge des einfallenden Lichtes berücksichtigt. Daß diese keine Rolle spielt, kann man an Hand der Tabelle 3 erkennen. Dort sind die Wirkungsfaktoren Q_{pr} für die dem Eisen bei 0.440 μ 0.508 μ und 0.668 μ zugehörigen Brechungsindices (v.d.Hulst, 1957) eingetragen. Es ergibt sich:

1) $Q_{pr}(x, 1.27-1.37i)$ und $Q_{pr}(x, 1.38-1.50i)$ unterscheiden sich für $0.5 \leq x \leq 1$ höchstens um 4 %, für $x \geq 1$ höchstens um 2 %.

2) $Q_{pr}(x, 1.27-1.37i)$ und $Q_{pr}(x, 1.70-1.84i)$ unterscheiden sich für $0.5 \leq x \leq 1$ um 20 % bis 10 %, bereits bei x = 2.0 ist diese Abweichung unter 3 % abgesunken und wird für größerwerdende x rasch kleiner.

Für $a = 10^{-4.7}$ cm entfallen bei der Bildung von $\int Q_{pr} I_\nu d\omega$ auf den Bereich $0.5 \leq x \leq 1$ nur 15 % der Gesamtintensität, für $a = 10^{-4.6}$ cm sind es schon weniger als 10 %. Also erhält man selbst im ungünstigsten Falle durch Berücksichtigung der Wellenabhängigkeit des Brechungsindex eine Abweichung der Größen $\overline{Q_{pr}}$ von den oben errechneten von weniger als 3 %, i.allg.sogar weniger als 2 %.

Schließlich zeigt Abb.9 den Verlauf von Q_{pr} für Teilchen mit Brechungsindices, die um den Brechungsindex von Eisen streuen. Dies entspräche einem Teilchenmaterial Eisen mit Verunreinigungen. Eine Abschätzung ergibt, daß die entsprechenden p_{PR}-Kurven alle in den in Abb.(11) schraffierten Bereich fallen, bzw. außerhalb dieses Bereiches praktisch mit der Kurve für Eisen übereinstimmen. (Die den schraffierten Bereich abgrenzenden gestrichelten Kurven werden als - sehr großzügige - Fehlergrenzkurven für die Eisenkurve nur benutzt, um in die Abb.11 nicht weitere Kurven eintragen zu müssen). Auch der Verlauf von $Q_{pr}(x)$ für Nickelteilchen (Abb.10) zeigt, daß man die p_{PR}-Kurve für Eisenteilchen als repräsentativ für absorbierende Teilchen ansehen kann.

Tabelle 3: Wirkungsfaktoren Q_{pr} für den Strahlungsdruck für verschiedene Brechungsindices von Eisen, die den Wellenlängen 0.440 /u, 0.508 /u und 0.668 /u entsprechen.

x	1.27-1.371	1.38-1.501	1.70-1.841	x	1.27-1.371	1.38-1.501	1.70-1.841
0.5	1.669	1.619	1.388	16	1.200	1.212	1.229
1	2.752	2.880	3.097	17	1.188	1.200	1.218
2	2.170	2.202	2.226	18	1.178	1.189	1.207
3	1.859	1.876	1.876	19	1.168	1.179	1.198
4	1.683	1.696	1.696	20	1.159	1.170	1.189
5	1.569	1.581	1.584	21	1.151	1.162	1.181
6	1.488	1.500	1.505	22	1.144	1.155	1.174
7	1.427	1.440	1.447	23	1.137	1.148	1.168
8	1.381	1.393	1.402	24	1.131	1.142	1.162
9	1.343	1.356	1.367	25	1.125	1.136	1.156
10	1.312	1.324	1.337	26	1.119	1.130	1.150
11	1.286	1.299	1.313	27	1.114	1.125	1.145
12	1.264	1.276	1.291	28	1.109	1.120	1.140
13	1.245	1.257	1.273	29	1.105	1.116	1.136
14	1.228	1.240	1.261	30	1.101	1.112	1.131
15	1.213	1.225	1.242				

Die ~~gestrichelte~~ strichpunktierte Kurve in Abb. 11 stellt p_{PR} für Eisenteilchen mit $Q_{pr} = 1, \delta \equiv 0$ dar. Die Berücksichtigung von $Q_{pr} \neq 1$ bedeutet also: Der Abfall von p_{PR} setzt früher ein (bei Teilchen von etwa 2,5-fachem Radius) und er ist etwas steiler. Man erkennt dies auch an (82): Da $\bar{Q}_{pr}$ für $x_S > 10$ zwischen 1,4 und 0,95 liegt und nur mit der 3. Wurzel in die Formel eingeht, ändert sich für $x_S > 10$, d.h. $a \geq 10^{-4}$ cm praktisch nichts in Abb. 11. Lediglich für $\alpha c \to \mu_0$ kommt der Faktor Q_{pr} in der Größe /u zum Tragen, der Einfluß von δ ist überall vernachlässigbar.

Nun ist jedoch die Annäherungsgeschwindigkeit der Teilchen $v_\infty \approx 20$ km/sec klein gegen die Entweichgeschwindigkeit auf der Sonnenoberfläche. Man erhält also nach H.Siedentopf (1950) einen effektiven Einfangradius der Sonne:

$$R_{eff} = R_\odot \sqrt{\frac{2\mu}{v^2 R_\odot}} \qquad (87)$$

Setzen wir $R_{VD} = k R_\odot$ (87a)

wo R_{VD} der Radius derjenigen Kugel um die Sonne sein soll, innerhalb derer die Teilchen verdampfen, so können wir für dielektrische Teilchen nach Over (1958) k = 4 setzen, für Eisenpartikel wollen wir wegen einer gewissen Willkür, die dieser Größe noch anhaftet, auch noch Teilchen berücksichtigen, die bis auf einen Abstand von 2 $R_\odot$ an die Sonne herankommen, also k = 2 setzen. Damit erhalten wir den Verdampfungs-Stoßparameter:

$$p_{VD} = \frac{\sqrt{2k R_\odot \mu}}{v} \qquad (88)$$

Diese Größe hat die Bedeutung: Alle Teilchen, die mit einem kleineren Stoßparameter als p_{VD} aus dem Unendlichen kommen, kommen der Sonne so nahe, daß sie wahrscheinlich verdampfen. In Abb. 12 ist p_{VD} zusammen mit p_{PR} in Abhängigkeit von der Teilchengröße aufgetragen. Man sieht, daß alle Teilchen, die aufgrund des Poynting-Robertson-Effektes von der Sonne eingefangen würden, sehr wahrscheinlich schon beim ersten Umlauf verdampfen. Die Streuung der Teilchengeschwindigkeit, die etwa 5 km/sec beträgt (Becker, 1950), ändert das Verhältnis p_{PR}/p_{VD} nicht wesentlich.

Nehmen wir indess an, daß die Sonne mit einer Geschwindigkeit von nur 1 km/sec in eine Staubwolke der hundertfachen Dichte des interstellaren Staubes eintritt, so wie es Lyttleton (1948) für seine Theorie der Kometenentstehung voraussetzt, so steigt das Verhältnis p_{PR}/p_{VD} um den Faktor $(20)^{4/3} \approx 74$ an. Da die eingefangene Masse mit $(p_{PR})^2 \cdot v^{-7/3}$ anwächst, d.h. proportional zu $v^{-7/3}$ ist, erhalten wir statt der von Best und Patterson (1960) errechneten Massenzunahme von 0,1 to/sec im Teilchenbereich $10^{-4.6}$ cm bis $10^{-2.6}$ cm $(20)^{7/3} \cdot 10^2 \cdot 0.1$ to/sec $\approx 10^4$ to/sec (Der Faktor 10^2 rührt von der um den Faktor 10^2 erhöhten Dichte her.) Nehmen wir eine lineare Ausdehnung der Wolke von 10 pc $= 3 \cdot 10^{14}$ km an, so erhalten wir für die Gesamtmasse, die während des Durchgangs eingefangen wird $3 \cdot 10^{14} \cdot 10^4$ to $= 3 \cdot 10^{24}$ g. Nach H.Elsässer (1958) beträgt die Dichte der Zodiakallichtteilchen mit Radien $a \leq 10^{-2}$ cm $2.5 \cdot 10^{-21}$ g/cm^3. Dies ergibt in einer Kugel vom Radius 5 A.E. eine Gesamtmasse von $4 \cdot 10^{20}$ g. Nimmt man mit Lyttleton (1952) an, daß die Sonne während ihrer Lebensdauer 100 Staubwolken mit einer Relativgeschwindigkeit unter 8 km/sec

durchquert hat, und fällt davon nur 1/10 in den Bereich 3 km/sec - 1 km/sec - bei 3 km/sec haben wir als Massenzuwachs immer noch $1.5 \cdot 10^{23}$ g - so dürfte sich damit die Frage des Aufbaues der Zodiakallichtwolke und die Frage nach ihrer Ergänzung beantworten lassen; und zwar, da mindestens 1/10 der oben errechneten Massenzunahmen (für v = 1 km/sec bzw. v = 3 km/sec) allein aufgrund des Poynting-Robertson-Effektes erfolgt, könnte dieser Effekt die Antwort auf diese Fragen liefern. Dasselbe gilt im wesentlichen auch für die noch zu besprechenden dielektrischen Teilchen.

Da die Lyttletonsche Theorie jedoch angezweifelt wird (Oort, 1951) soll die Untersuchung in dieser Richtung nicht weitergeführt werden.

Bei dielektrischen Teilchen mit Radien $a > 10^{-5}$ cm zeigt schon eine überschlägige Betrachtung, daß der Einfang-Stoßparameter p_{PR} den Verdampfungs-Stoßparameter p_{VD} nicht übersteigt, obwohl $Q_{pr}(\lambda)$ ein komplizierteres Verhalten aufweist als bei absorbierenden Teilchen. Als Beispiel mögen Teilchen mit dem Brechungsindex n = 1.333 betrachtet werden:

Es wurde $Q_{pr}(\lambda)$ für $0.1 \leq \lambda \leq 100$ in Abständen $\Delta\lambda = 0.1$, für $100 \leq \lambda \leq 200$ in Abständen $\Delta\lambda = 1$ und für $200 \leq \lambda \leq 4000$ in Abständen $\Delta\lambda = 20$ gerechnet. Abb. 13 zeigt den Verlauf von Q_{pr} für $0.1 \leq \lambda \leq 42$ Abb. 14 für $85 \leq \lambda \leq 95$. Aus Abb. 14 ist zu erkennen, daß die Amplituden der Schwankungen abklingen. Nach einer Proberechnung, wobei in einem Intervall mit der Schrittweite $\Delta\lambda = 0.05$ gerechnet wurde, und nach Rechnungen anderer Autoren (van de Hulst, 1957), die den mit Q_{pr} in enger Beziehung stehenden Wirkungsfaktor für die Extinktion berechneten, reicht die gewählte Schrittweite von $\Delta\lambda = 0.1$ aus, um alle Extrema aufzulösen.

Es ergab sich: Q_{pr} ist sogar überall kleiner als 1. Es könnte also lediglich durch die raschen Schwankungen von $Q_{pr}(\lambda)$, d.h., über die Größe δ zu einer Vergrößerung des Quotienten p_{PR}/p_{VD} kommen. Man wird jedoch von vornherein vermuten, daß diese Schwankungen bei der Integration über das ganze Spektrum sich herausmitteln. Dies wurde wenigstens für einen Fall (n = 1,333) durch eine grobe Abschätzung verifiziert.

Wenn man nämlich das in (18) auf der rechten Seite im Zähler stehende Integral umformt:

$$\int_0^\infty \frac{dQ_{pr}}{d\nu} \nu I_\nu d\nu = Q_{pr} \nu I_\nu \Big|_0^\infty - \int_0^\infty Q_{pr} \left(I_\nu - \nu \frac{dI_\nu}{d\nu} \right) d\nu$$

so vereinfacht sich die Rechnung wesentlich. Es läßt sich das Intervall $0 \leq \upsilon \leq \infty$, das praktisch dem Wellenlängenintervall 2500 Å bis 25000 Å entspricht, in wenige Teilintervalle zerlegen, in denen I_ν monoton ist. Es genügt dann schon, Q_{pr} durch $Q_{pr} = k + \Delta k$ zu approximieren, wo k eine Konstante und Δk den maximalen Fehler der Annäherung bedeutet, um zu zeigen, daß $|\delta| \leq 22.5$ ist. Es kann p_{PR} also durch den Faktor $[5+\delta)2\pi]^{1/3}$ höchstens um den Faktor $5,5^{1/3} \approx 1,8$ vergrößert werden. Für $\chi_\zeta = 10$ - dort liegt etwa das Maximum der p_{PR}-Kurve- wo dieser Faktor die p_{PR}-Kurve ein wenig über die p_{VD}-Kurve hinausheben könnte, wurde eine verfeinerte Abschätzung für δ durchgeführt mit 3 Intervallen, in denen $Q_{pr} = k_\nu + \Delta k_\nu$, $\nu = 1,2,3$ gesetzt wurde; sie erbrachte $|\delta| \leq 2$.

Eine weitere Rechnung für n = 1,5, die für $0.2 \leq x \leq 10^3$, die allerdings mit größerer Schrittweite als die vorige durchgeführt wurde, ergab für das entsprechende $Q_{pr}(x)$ ein ganz ähnliches Verhalten; insbesondere ist nur in einem kleinen Intervall $Q_{pr} > 1$, aber auch da ist $1.2 > Q_{pr}$. Die vielen kleinen Schwankungen treten ebenfalls auf, mitteln sich aber gewiß wieder heraus. Dies gilt erst recht für die Spektrallinien in I_ν, die man sich hier über das Kontinuum verschmiert denken muß.

Es wäre lediglich interessant, nachzuprüfen, ob etwa $\delta < -1$ ist; dies hieße nämlich nach S. 19 , daß die Exzentrizität der Bahnen zunimmt. Dazu wäre jedoch ein erheblich größerer numerischer Aufwand erforderlich, als er hier getrieben wurde.

Für kleine dielektrische Partikel wird der Strahlungsdruck für $a \to 0$ wieder kleiner als die Gravitationskraft. Es entsteht also ein zweites a-Intervall, in dem Teilchen durch den Poynting-Robertson-Effekt eingefangen werden. Die zu (81) gehörigen Kurven zeigt Abb. 15. Es wurden verschiedene Brechungsindices und Dichten angenommen, die etwa Eispartikeln oder silikathaltigen Partikeln entsprechen. Nach v.d.Hulst (1957) kann man in den angegebenen Intervallen für total reflektierende Teilchen $Q_{pr}(x) = \frac{14}{3} x^4$ $(n \to \infty)$, und $Q_{pr} = \frac{8}{3}\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2 x^4$ für die übrigen Teilchen setzen. Es ist also $\delta = 4$, für Q_{pr} können wir

$Q_{pr}(x_S)$ (127)) nehmen. Das rechte Intervallende in den Abbildungen 15 ist wieder so gewählt, daß dort der Strahlungsdruck etwa 80% der Gravitationskraft aufhebt. Nach links laufen die Kurven wie Geraden der Steigung 1 nach $-\infty$. Es ergibt sich wieder, daß alle Teilchen, die auf Grund des Poynting-Robertson-Effektes eingefangen würden, der Sonne zu nahe kommen und verdampfen.

VI. Anwendung der Formel (81) auf die von Neuen Kometen ausgeworfenen Staubteilchen.

Es soll nun versucht werden, die Staubteilchen mit Hilfe des Poynting-Robertson-Effektes aus dem Staubauswurf Neuer Kometen, d.h., aus Kometen mit einer Bahnexzentrizität $\varepsilon \approx 1$ zu gewinnen. Harwitt (1963) zeigte bereits, daß die Alten Kometen (Umlaufszeit $P < 200$ Jahre) nicht in der Lage sind, den erforderlichen Massenzuwachs an hinreichend kleinen Teilchen zu liefern.

Wir wollen nun die Formel (81) benutzen, um für $\varepsilon = 1$ (Parabelbahn) auszurechnen, unter welchen Umständen welche Teilchen aufgrund des Poynting-Robertson-Effektes in das Sonnensystem eingeführt werden. Dabei rechnen wir so, als ob das Teilchen im Punkt (r_0, φ_0) mit der Entweichgeschwindigkeit des Kometen in Richtung der Kometenbahn losgelassen würde. Der Strahlungsdruck auf den Kometen ist gegenüber der Gravitationswirkung vernachlässigbar. Ist m die Teilchenmasse, dann gilt

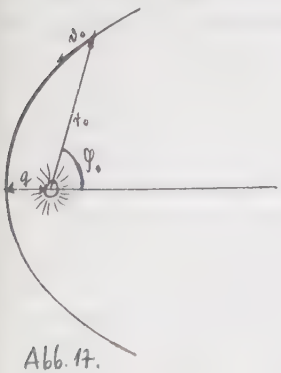


Abb. 17.

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{m\mu}{r_0} \quad (89a)$$

Nun wirkt auf das Teilchen der durch α charakterisierte Strahlungsdruck. Die tatsächliche Entweichgeschwindigkeit v_E des Teilchens berechnet sich also aus

$$\frac{1}{2} m v_E^2 = \frac{(\mu_0 - \alpha c)}{r_0} m = \frac{\mu m}{r_0} \quad (89)$$

mit $\mu < \mu_0$. Das Teilchen hat damit eine Entweichgeschwindigkeit $v_E < v_0$. Es dürfte nicht im Sonnensystem bleiben. Die zu den Anfangswerten $(r_0, \varphi_0, \dot{r}_0, \dot{\varphi}_0)$ gehörige Kepler-Hyperbel kann man folgender-

maßen berechnen: Die Bahngleichung für die Parabel des Kometen lautet:

$$r = \frac{\frac{r_0^4 \dot{\varphi}_0^2}{\mu_0}}{1 - \cos\varphi} \qquad (90)$$

Daraus folgt die Periheldistanz q des Kometen:

$$q = \frac{r_0^4 \dot{\varphi}_0^2}{2\mu_0} \qquad (91)$$

Die Hyperbelgleichung der Teilchenbahn lautet:

$$r = \frac{\frac{r_0^4 \dot{\varphi}_0^2}{\mu}}{1 - \varepsilon_H \cos(\varphi - \varphi_1)} = 2\frac{\mu_0}{\mu} q \frac{1}{1 - \varepsilon_H \cos(\varphi - \varphi_1)} \qquad (92)$$

Die Exzentrizität ε_H der Hyperbel läßt sich aus der folgenden Gleichung berechnen (Joos, 1950):

$$\varepsilon^2 = \frac{(r_0^2 \dot{\varphi}_0)^2}{\mu^2}\left(v_\infty^2 + \frac{\mu^2}{r_0^4 \dot{\varphi}_0^2}\right) \qquad (93)$$

Dabei ist v_∞ die Geschwindigkeit im Unendlichen. Sie läßt sich aus dem Energiesatz berechnen:

$$\frac{1}{2} m v_\infty^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{\mu}{r_0} m$$

oder nach (89a)

$$v_\infty^2 = \frac{2(\mu_0 - \mu)}{r_0}$$

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2(\mu_0 - \mu)}{r_0}} \qquad (94)$$

Dies in (93) angesetzt, ergibt zusammen mit (91):

$$\varepsilon_H^2 = \frac{(r_0^2 \dot{\varphi}_0)^2}{\mu^2}\frac{\mu_0 - \mu}{r_0} + 1 = 4\frac{\mu_0 q}{\mu^2}\frac{\mu_0 - \mu}{r_0} + 1 \qquad (95)$$

Den Abstand der Asymptoten der Hyperbel vom Brennpunkt (Sonne) - dies ist bei der Hyperbel die kleine Halbachse b - erhält man aus der Gleichung:

$$\varepsilon_H^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{b^2 + p_H^2}{b^2}$$

$$b^2 = \frac{p_H^2}{\varepsilon_H^2 - 1} \qquad (96)$$

wobei $p_H = \frac{b^2}{a}$ der Parameter der Hyperbel, also der Abstand r, bei dem $\varphi - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ ist. Er ist nach Gleichung (92):

$$p_H = 2\frac{\mu_0}{\mu} q \qquad (97)$$

Setzt man p_H aus (97) und ε_H^2 aus (95) in (96) ein, so ergibt sich:

$$b^2 = \mu_0 \frac{r_0 q}{\mu_0 - \mu} = \mu_0 \frac{r_0 q}{\alpha c} \qquad (98)$$

Nimmt man nun r_b hinreichend groß an, so kann man so rechnen, als ob das Teilchen mit der Geschwindigkeit

$$v_\infty = \sqrt{2\left(\frac{\mu_0}{r_0} - \frac{\alpha}{r_b}\right)} \qquad (99)$$

und dem Stoßparameter $p = b$ aus dem Unendlichen gekommen wäre. Es läßt sich dann die Formel (81) anwenden, wenn man entscheiden will, ob das Teilchen eingefangen wird oder nicht. Nach (81) muß im Fall des Einfangs gelten:

$$p^2 = b^2 = \mu_0 \frac{r_0 q}{\alpha c} \leq \frac{((5+\delta)2\pi)^{2/3}\,\mu^{4/3}\,\alpha^{2/3}}{\left(\left(\frac{2\alpha c}{r_0}\right)^{1/2}\right)^{10/3}} \qquad (100a)$$

Daraus folgt der heliozentrische Grenzabstand:

$$r_{0g} = 2^{5/3}\,\frac{\mu_0^{3/2}}{\mu^2}\,\frac{c\cdot q^{3/2}}{(5+\delta)2\pi} \qquad (100)$$

Dies bedeutet: Ein Teilchen, das durch α d.h., durch $\mu = \mu_0 - \alpha$ und δ gekennzeichnet ist, wird von der Sonne eingefangen, wenn es in einem heliozentrischen Abstand $r_0 \geq r_{0g}$ vom Kometen abgelöst wird, andernfalls nicht.

Es soll noch etwas über die Voraussetzungen, die zur Gewinnung von Gleichung (100) gemacht wurden, gesagt werden: Man kann (100) auch gewinnen durch eine angenäherte Lösung von (65) und (66). Das Verfahren läuft ganz ähnlich wie für den Fall $1/r_0 = 0$. Jedoch ist die Rechnung wesentlich aufwendiger und komplizierter als dort. Das Ergebnis ist, daß die Gleichung (100) in den meisten interessierenden Fällen einen Fehler von höchstens 5% bringt. Es zeigt sich nämlich, daß für diese Fälle stets $r_{0g} \gg q$ ist, d.h., man darf so rechnen, als ob das Teilchen mit der Geschwindigkeit v_∞ und dem Stoßparameter b aus dem Unendlichen käme. Der Hauptteil des Energieverlustes fällt ohnehin auf den sonnennahen Teil der Bahn. Ebenso zeigt sich bei einer ausführlichen Untersuchung, daß die Ergebnisse praktisch erhalten bleiben für $|1-\varepsilon| \leq 10^{-5}$. Da die Neuen Kometen nach der Theorie von Oort (Richter, 1954) aus Entfernungen von mindestens 20 000 A.E. kommen, ist dies für Kometen mit Periheldistanzen $q \leq 1$ A.E. erfüllt.

Die Formel (100) soll nun kurz diskutiert werden. Zunächst ist klar, daß die Chance für die Sonne ein Teilchen einzufangen,

für größer werdendes r_0 steigt, da $v \sim r_0^{-1/2}$ gilt, d.h., nach (81) der Einfang-Stoßparameter $p_{TR} \sim r_0^{5/6}$ ist, während der Stoßparameter b, mit dem das Teilchen aus dem Unendlichen kommt, nur mit $r_0^{1/2}$ (Gl.98) ansteigt. Ferner ist klar, daß mit fallendem q r_{0g} abnimmt, da die Teilchen dann näher an die Sonne herankommen. Die Teilchen haben einen Perihelabstand $q' \geq q$ beim ersten Umlauf; das gilt jedenfalls für den Keplerfall. Jedoch kann der Perihelabstand in guter erster Näherung aus der zugehörigen Kepler-Hyperbel berechnet werden. Der Energieverlust findet zwar hauptsächlich im Perihel statt, kinematisch wirkt sich dies jedoch erst nach dem Perihel durchgang aus.

In Abb.17a, 17b, 17c ist r_{0g} für verschiedene Teilchenarten aufgetragen, wobei Abb.17c wieder stellvertretend für alle absorbierenden Teilchen genommen werden kann. Bezeichnet man mit a_0 den Radius, für den der Strahlungsdruck der Gravitationskraft gleich wird (diese Größe kann man in den Abbildungen 11a.16 hinreichend genau am Kordinatenanfangspunkt ablesen) so sieht man, daß man jeweils die Teilchen mit $a \geq 3a_0$ (große Teilchen) bzw. $a \leq \frac{a_0}{3}$ (kleine dielektrische Teilchen) praktisch zusammenfassen kann. Nur auf diese beziehen sich die folgenden Angaben.

Es zeigt sich, daß für $q \geq 4R_\odot$ $r_{0g} \geq 2.5$ A.E. wird. Aber schon für $q = 10R_\odot$ wird $r_{0g} \geq 10$ A.E.. Die entscheidende Frage ist nun, in welchen heliozentrischen Distanzen Kometen anfangen, Staub auszuwerfen. Teilt man nach Z.Sekanina (1961) die Entwicklung der Kometen in drei Stufen ein, so erkennt man, daß gerade die I. Stufe (Entwicklung einer Staubkoma) Neuer Kometen hier in Frage kommt. Dies kann man aus den Tabellen 3 und 6, die allerdings noch ein recht dürftiges Material darstellen, der Arbeit von Z.Sekanina (1961) entnehmen. Demnach endigt die Entwicklung der Staubkoma gerade bei 2-3 A.E. Wo diese erste Stufe beginnt ist unbekannt. Oort und Schmidt (1951) haben die Vorstellung entwickelt, daß in wesentlich größerer Entfernung als 3 A.E. bei der ersten Annäherung eines Kometen eine Staubkoma sich entwickeln müßte. In der Tat sind Kometen beobachtet worden, die bereits in einer Entfernung $r \geq 5$ A.E. eine beträchtliche Staubkoma trugen. Oort und Schmidt weisen darauf hin, daß eine solche Koma sich nicht plötzlich entwickelt haben kann , also schon in größeren Entfernungen existiert haben muß. Dafür spricht auch die charakteristische Helligkeitsentwicklung bei der ersten Annäherung

eines Neuen Kometen, und das starke Kontinuum, das ihre Strahlung kennzeichnet. Auch gehen in solche Überlegungen die Vorstellungen über die Konstitution der Kometen ein. Diese divergieren zur Zeit noch stark. Hätte man es z.B. mit einer lockeren Teilchenwolke zu tun, in der die Stöße elastisch sind oder bei großen Geschwindigkeiten stattfinden, so könnte es schon in großen Entfernungen von der Sonne zur langsamen Dissipation des Teilchenhaufens kommen (Richter, 1954). Im übrigen könnte gerade die Formel (σ1) die Lyttletonsche Theorie über die Entstehung der Kometen als lockere Teilchenwolke verbessern, da für v = 1 km/sec (wie von Lyttleton angenommen) durch den Poynting-Robertson-Effekt eine Wolke von Teilchen um die Sonne entsteht, die besonders dadurch, daß die Teilchen eine bestimmte Verdichtungszone im Antapex der Sonne häufig durchlaufen, eine wesentlich größere Chance zur Bildung von Teilchenhaufen bietet, als in dem von Lyttleton betrachteten Fall.

Hier soll mit Oort (1963) angenommen werden, daß ein Neuer Komet bei einem heliozentrischen Abstand von etwa 10 A.E. anfängt, Staub auszuwerfen. Dadurch ist für sehr kleine dielektrische Teilchen q beschränkt auf $4R_\odot \leq q \leq 10R_\odot$ (Abb.17 a,b); für absorbierende Teilchen ist q eingeschränkt durch $2R_\odot \leq q \leq 6.5R_\odot$ (Abb.17c). Für große dielektrische Teilchen verbietet sich eine der Abb.17 c entsprechende Darstellung von (100), da in (100) δ nur linear eingeht und die Abschätzungen für δ sehr grob sind. Jedoch ist δ sicher negativ (mit dem Schweif nach klein) (langsamer Abfall der Q_{pr}-Kurven für große x). Da für absorbierende Teilchen i.a. $|\delta| \ll 5$ gilt, stellt also Abb. 17c zumindest eine Abschätzung für γ_q auch für große dielektrische Teilchen dar, wobei man sich die a-Achse jeweils um $\log \frac{7.\rho}{\varrho}$ nach links verschoben denken muß, wo ϱ die Teilchendichte ist. In den wenig veränderlichen Teil der Kurven geht ja Q_{pr} nur schwach ein. Berücksichtigt man wieder nur Teilchen, die in einer Entfernung von weniger als 10 A.E. ausgestoßen werden, so ist q eingeschränkt durch $4R_\odot \leq q \leq 6.5R_\odot$.

Diese eingefangenen Teilchen laufen aber dann auf stark exzentrischen Bahnen, deren Exzentrizität wohl abnimmt - jedenfalls soweit es sich um absorbierende Teilchen handelt - jedoch wird auch ihr Perihelabstand immer kleiner.

Immerhin sind sie noch zu vielen Umläufen in der Lage, wie die folgende Rechnung zeigt:

Der Parameter p der Bahnellipse nimmt nach Robertson (1957) ab nach der Formel:

$$\frac{\Delta p}{p} = -\frac{4\pi\alpha}{h} = -\frac{4\pi}{\phi_0} \qquad (101)$$

Dabei ist zwar $\delta = 0$ vorausgesetzt. Beschränken wir uns auf absorbierende Teilchen, so ist dies mit guter Näherung erfüllt.

ϕ_0 erhalten wir für die Parabel aus einer elementaren Rechnung zu:

$$\phi_0 = \frac{r_0^2 \dot{\theta}_0}{\alpha} = \sqrt{\frac{2q}{\alpha}} \qquad (102)$$

Setzen wir $q = 4R_\odot$, $a = 10^{-3.5}\ cm \approx 3 \cdot 10^{-4}\ cm$, so ergibt sich mit $\alpha \approx 10^{11} cm^2/sec$

$$\phi_0 \approx 10^5 \qquad (105)$$

Da $\frac{\Delta p}{p}$ auch ein Maß für die Abnahme der Periheldistanzen ist, können wir die Zahl n der Umläufe zwischen zwischen den Periheldistanzen $4R_\odot$ und $3R_\odot$ nach (101) auch aus der Gleichung

$$\left(1 - \frac{4\pi}{\phi_0}\right)^n = \frac{3}{4} \qquad (106)$$

errechnen. Es ergibt sich für die Zahl der Umläufe $n \approx 2 \cdot 10^3$.

Für die Abnahme der Exzentrizität ε erhält man nach Robertson:

$$\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{5\pi}{\phi_0} \qquad (107)$$

und daraus mit (105):

$$\varepsilon = 0{,}7 \cdot \varepsilon_0$$

Da die anfängliche Exzentrizität ε_0 sicherlich nahe bei 1 liegt, heißt das, daß die Bahn immer stark exzentrisch bleibt.

Nun hat zwar der größte Teil der neuentdeckten Kometen eine fast parabolische Bahn (J.G.Porter, 1963), und sie sind als Staubquellen ergiebiger als Kometen mit Bahnen kleiner Exzentrizität; quantitatives Material über den Staubauswurf in der Stufe I der Kometenentwicklung liegt jedoch nicht vor. Es erscheint jedoch nicht ausgeschlossen, daß der hier beschriebene Prozeß des Einfangs kometarischer Partikel einen nennenswerten Beitrag zur Zodiakallichtteilchenwolke liefert.

VII. Berücksichtigung des korpuskularen Poynting-Robertson-Effektes.

Die Protonen des Solarwindes stellen einen ständigen Teilchenstrom dar, der mit hoher Geschwindigkeit von der Sonne her auf das Teilchen zukommt. Bezeichnen wir mit N_c die Dichte des Protonenstromes mit V_c die Geschwindigkeit derselben und mit m_H die Protonenmasse, so erhalten wir durch die Protoneneinwirkung eine zusätzliche Kraft $F_{x'c}$ in der x'-Richtung (Abb.1):

$$F_{x'c} = \left[\pi a^2 N_c(R)\left(V_c(R) - v_x\right)\right] k\, m_H \left(V_c(R) - v_x\right) \qquad (107)$$

oder mit $V_c \gg v_x$

$$F_{x'c} = \pi a^2 N_c(R)\, V_c^2(R)\left(1 - \frac{2 v_x}{V_c}\right) k\, m_H \qquad (108)$$

Nimmt man nun an, daß die Protonen im momentanen Ruhsystem des Staubteilchens symmetrisch um ihre Einfallsrichtung gestreut werden, so ergibt sich genau wie bei den Lichtquanten ein Aberrationseffekt, d.h., eine Kraft in der y'-Richtung

$$F_{y'} = -\pi a^2 N_c(R)\, V_c^2(R)\, k\, m_H \frac{v_y}{V_c(R)} \qquad (109)$$

In die Konstante k geht die Art des Stoßes und die Streucharakteristik ein. Da man darüber nichts sagen kann, setzen wir einfach k = 1. Dies ist insbesondere dann richtig, wenn der Protonenstrom, der das Teilchen trifft, seinen gesamten Impuls, den er im Ruhsystem des Teilchens hat, an dieses abgibt; und dies wiederum ist richtig, wenn die Protonen im Ruhsystem des Teilchens kugelsymmetrisch gestreut werden. Das ist der von Whipple (1955) betrachtete Fall. Die Willkür, die in dieser Annahme liegt, wird dadurch gemildert, daß k bei Übergang zu anderen Stoßarten und Streucharakteristiken sich wahrscheinlich nicht um eine Größenordnung ändert.

Beachten wir noch, daß für den Protonenstrom wegen der Divergenzfreiheit der Strömung gilt:

$$N_c(R)\, V_c(R) \cdot R^2 = N_c(1\,A.E.)\, V_c(1\,A.E.) \cdot \varrho_\delta^2 \qquad (110)$$

und setzen wir V_c als konstanz voraus, si wird aus (108) und (110):

$$F_{x'c} = \pi a^2 m_H \frac{N_c(1\,A.E.)\, V_c^2(1\,A.E.)\, \varrho_\delta^2}{R^2}\left(1 - \frac{2 v_x}{V_c}\right) \qquad (111)$$

$$F_{y'c} = -\pi a^2 m_H \frac{N_c (1\,A.E.) V_c^2 (1\,A.E.) R_\odot^2}{R^2} \frac{v_y}{V_c} \qquad (112)$$

Vergleichen wir dies mit (30), (31) und bezeichnen wir mit F_c die von den Protonen in der x'-Richtung ausgeübte Kraft (111) ohne den Korrekturterm, mit α_L die bisherige Konstante und mit α_c die aus (111) bzw. (112) abgeleitete analoge Konstante, die vom korpuskularen Poynting-Robertson-Effekt herrührt, so ergibt sich:

$$F_c = S \frac{3 m_H N_c (1\,A.E.) V_c^2 R_\odot^2}{4 a \rho c^2 M_\odot} \qquad (113)$$

$$\frac{\alpha_c}{\alpha_L} = \frac{4\pi m_H c^2 N_c (1\,A.E.) \cdot V_c \cdot R_\odot^2}{\overline{Q_{pr}} \cdot E}$$

wo E die gesamte von der Sonne in der Sekunde abgegebene Strahlungsenergie und S die Gravitationskraft bedeuten. Diese Formeln findet man auch in der Arbeit von Whipple (1955)(bis auf $\overline{Q_{pr}}$).

Für V_c = 300 km/sec, N_c = 2/cm^3 und ρ = 4 g/cm^3 erhält man $F_c = S$ erst für $a = 10^{-9}$ cm. Man kann also die reine Druckkomponente der Protonenstrahlung gegen die Gravitationskraft vernachlässigen.

Ebenso erhält man für den Fall $\overline{Q_{pr}} \approx 1$: $\frac{\alpha_c}{\alpha_L} \approx 6 \cdot 10^{-2}$, d.h., eine nicht bemerkenswerte Korrektur des bisher behandelten Poynting-Robertson-Effektes. Dies gilt für absorbierende und große dielektrische Teilchen. Für kleine dielektrische Teilchen jedoch, für die $\overline{Q_{pr}} \sim a^4$ gilt, wächst das Verhältnis (114) stark an. Die Korrektur durch den korpuskularen Poynting-Robertson-Effekt wird wesentlich größer als die durch die Lichteinwirkung verursachte (In den Gleichungen (111), (112) steht $\frac{v_x}{V_c}$ bzw. $\frac{v_y}{V_c}$ anstelle von $\frac{v_x}{c}$ bzw. $\frac{v_y}{c}$ in (30) und (31).

Addiert man zu $F_{x'c}$ bzw. $F_{y'c}$ zu $F_{x'}$ bzw. $F_{y'}$, so heißt dies, daß in (30) einfach α durch $\alpha_L + \alpha_c$ ersetzt wird; in (31) führen wir eine Konstante δ' ein, so daß gilt:

$$(2+\delta')(\alpha_L + \alpha_c) = (2+\delta)\alpha_L + 2\alpha_c$$

also mit $\delta = 4$:

$$\delta' = \frac{6\alpha_L + 2\alpha_c}{\alpha_L + \alpha_c} - 2 \qquad (115)$$

Wir wollen ja als Einfangquerschnitt für die Protonen einfach den geometrischen Querschnitt der Staubteilchen benutzen. Das Ergebnis der kombinierten Rechnung für totalreflektierende Teilchen der Dichte $\varrho = 1\,g/cm^3$ zeigt die Abb.18. Die gestrichelt eingetragene Kurve ergibt sich ohne Berücksichtigung des korpuskularen Effektes; außerdem ist die Kurve für den Verdampfungs-Stoßparameter (strichpunktiert) eingetragen. Es ist wieder zu beachten, daß die Kurven in dem schmalen Bereich nahe des Grenzradius, für den die Strahlungsdruckkraft gleich der Gravitationskraft wird, wo sie stark abfallen, mit einem beträchtlichen Fehler behaftet sein können. Als Parameter ist die Größe $N_c(1A.E.)V_c$ in $sec^{-1}cm^{-2}$ angeschrieben.

Aus Abb.18 kann man ablesen:

Für eine mittlere Größe $N_c(1A.E.)\cdot V_c$ bewirkt der korpuskulare Poynting-Robertson-Effekt, daß die Sonne totalreflektierende Teilchen der Dichte $\varrho = 1\,g/cm^3$ und mit Radien $a \lesssim 5\cdot10^{-7}cm$ einfängt, die nicht schon beim ersten Umlauf verdampfen. Diese beschreiben dann allerdings stark exzentrische Bahnen mit Periheldistanzen der Größenordnung 15 $R_\odot$, wie man aus einer leichten Verallgemeinerung von (87) ableiten kann.

Durchquert die Sonne eine galaktische Dunkelwolke mit einer Relativgeschwindigkeit von 1 km/sec, so wächst der Einfang-Stoßparameter um den Faktor $20^{5/3} \approx 150$ an. Ein wesentlicher Teil der eingefangenen Teilchen beschreibt Bahnen mit Periheldistanzen der Größenordnung 4 A.E. Da dieser Einfangprozeß allein durch die Größe α_c bestimmt ist, und $\alpha_c \sim \frac{1}{a\varrho}$ gilt, erhält man dasselbe Ergebnis für Teilchen der Dichte $\varrho = 2\,g/cm^3$ mit Radien $a \lesssim 2.5\cdot10^{-7}cm$. Dies kann man überschlägig also für alle dielektrischen Teilchen der hier diskutierten Art mit Radien $a \lesssim 3\cdot10^{-7}cm$ aussagen.

Auch die Ungleichung (100a) läßt sich leicht so erweitern, daß sie den korpuskularen Effekt mitenthält. Es geht nämlich in die Nenner von (100a) anstelle der Größe α die Größe $\alpha_L + \alpha_c \frac{V_c}{c}$ ein, während im Zähler auf der rechten Seite α durch $\alpha_L + \alpha_c$ zu ersetzen ist; an die Stelle von ξ tritt ξ' gemäß (115), μ braucht nicht abgeändert zu werden (S.44).

Da für die Herleitung von (100a) vorausgesetzt wurde, daß die Teilchen, aus dem Unendlichen kommend, sich bis zum Ort der Ablösung vom Kometen bereits unter dem Einfluß des Poynting-Robertson-Effektes bewegen, andrerseits währenddessen praktisch Kepler-Bahnen durchlaufen, sollen hier nur Teilchen betrachtet werden, die sich vom Kometen in einer heliozentrischen Distanz ablösen, die mindestens gleich dem Fünffachen der Periheldistanz q des Kometen ist. (Eine genauere Rechnung würde kein wesentlich weiterreichendes Ergebnis bringen; man darf dem Perihel nicht zu nahe kommen, da dort der Hauptenergieverlust stattfindet. Außerdem entwickeln die Kometen in Perihelnähe Plasmaschweife in denen die Mechanik der Teilchen sicherlich nicht so einfach ist, wie die hier angenommene.)

Für $N_c(1A.E.)\,V_c = 6\cdot 10^{7}\,sec^{-1}cm^{-2}$ läßt sich aus der abgeänderten Ungleichung (100a) ableiten:

Ein Neuer Komet verliert alle dielektrischen Teilchen der hier diskutierten Art mit Radien $a \lesssim 3\cdot 10^{-7}cm$, die er zwischen den Sonnenabständen 10 A.E. und 3 A.E. auswirft an das Sonnensystem, wenn die Periheldistanz des Kometen q = 125 $R_\odot \approx 0.6$ A.E. ist. Für q = 16 $R_\odot$ verbleiben alle Teilchen mit Radien $a \lesssim 5\cdot 10^{-7}cm$ die zwischen 10 A.E. und 0.4 A.E. Sonnenabstand ausgestoßen werden im Sonnensystem. Dies reicht sogar in die Stufen II und III der Kometenentwicklung hinein (Sekanina, 1961). Diese Teilchen sind also in der Lage, auch die äußere Zodiakallichtteilwolke aufzufüllen. (Die angegebenen Grenzradien sind so gewählt, daß das Gesagte für die hier betrachteten dielektrischen Teilchenarten gilt. Dadurch verschenkt man für gewisse Teilchenarten etwas, jedoch würde eine weitere Differenzierung die Grenzradien für keine Teilchenart um eine Größenordnung erhöhen).

Für $N_c(1A.E.)\,V_c = 4{,}8\cdot 10^{8}\,sec^{-1}cm^{-2}$ lassen sich die angeführten Grenzradien noch etwas größer angeben, aber auch dies bringt keinen Faktor 10 im Teilchenradius, da bei so großen Teilchen der Lichtstrahlungdruck in der Größe μ wieder stark zum Tragen kommt.

Um nicht zusätzliche Hypothesen über die Radienverteilung

kleiner interstellarer Partikel oder über den Staubauswurf von Neuen Kometen annehmen zu müssen, soll hier keine sekundliche Massenzunahme der Sonnensystems errechnet werden.

Es kann jedoch gesagt werden: Es besteht die Möglichkeit, daß eine zirkumsolare Wolke aus dielektrischen Teilchen mit Radien $a < 10^{-5}$ cm durch ständigen Zustrom aus interstellaren und kometarischem Material aufrechterhalten wird. Es ist sehr wahrscheinlich braucht sie wesentlich weniger dicht zu sein als eine Wolke aus großen dielektrischen und absorbierenden Partikeln, um wenigstens den hohen Polarisationsgrad des Zodiakallichtes zu erklären. So kleine Teilchen sind in den bisherigen Modellen jedoch noch nicht berücksichtigt.

Zusammenfassung:

Die Berücksichtigung der Abhängigkeit des Wirkungsfaktors für den Strahlungsdruck vom Teilchenradius erschließt zwar in Ergänzung zu den von Best und Patterson (1962) betrachteten Teilchen einen weiteren Bereich von kleinen dielektrischen Teilchen, die für die Auffüllung der Zodiakallichtmaterie ausinterstellarem Staub in Frage kommen; jedoch fallen alle interstellaren Staubteilchen, die von der Sonne aufgrund des Poynting-Robertson-Effektes eingefangen würden, beim ersten Umlauf in die Sonne, bzw. kommen ihr so nahe, daß sie verdampfen.

Neue Kometen mit fast parabolischen Bahnen von der Perihel-distanz q, die zwischen heliozentrischen Abständen von 10 A.E. bis 2,5 A.E. Staub auswerfen, können diesen Staub an das Sonnensystem verlieren unter der Bedingung $4R_\odot \leq q \leq 10R_\odot$ falls es sich um kleine dielektrische Partikel handelt mit Radien $a \leq 0.3a_0$. (Abb. 17a,b). Dabei ist a_0 der kleinere der beiden Radien, für die bei dielektrischen Teilchen die Strahlungsdruckkraft gleich der Gravitationskraft wird. a_0 liegt je nach Teilchendichte und Brechungsindex zwischen 3.10^{-6} cm und 10^{-5} cm (Abb. 15).

Ist $2R_\odot \leq q \leq 6.5R_\odot$, so können auch große absorbierende Partikel mit einem dem Eisen ähnlichen Brechungsindex der Dichte $\rho = 7.8$ g/cm^3 und mit Radien $a \geq 7.10^{-5}$ cm im Sonnensystem verbleiben, wenn sie vom Kometen zwischen den heliozentrischen

Abständen 10 A.E. und 2,5 A.E. ausgestoßen werden.(Abb 17c)

Dasselbe gilt auch näherungsweise für große dielektrische Partikel mit Radien $a \geq 5 \cdot 10^{-4}$ cm, wofern für die Periheldistanz q des Kometen gilt $4 R_\odot \leq q \leq 6.5 R_\odot$.

Macht man mit Lyttleton die Voraussetzung, daß die Sonne einige Male mit Geschwindigkeiten der Größenordnung 1 km/sec durch interstellare Dunkelwolken hindurchgegangen ist, so ergibt sich bei diesem dieser Durchgänge ein Massenzuwachs der Zodiallichtteilchenwolke, der größer ist als ihre heutige Gesamtmasse in einer Kugel vom Radius 5 A.E.

Der korpuskulare Poynting-Robertson-Effekt, der durch die Protonen des Solarwindes verursacht wird, ist von Bedeutung für kleine dielektrische Partikel mit Radien $a \leq 10^{-5}$ cm Bedeutet $N_c(E)$ die Dichte dieser Partikel am Erdort und $V_c(E)$ ihre Geschwindigkeit und nimmt man $N_c V_c = 4.\ell \cdot 10^9$ sec^{-1}cm^{-2} an, so bewirkt der korpuskulare Poynting-Robertson-Effekt einen ständigen Zustrom von interstellaren dielektrischen Partikeln mit Radien $a \leq 3 \cdot 10^{-7}$ cm, die Bahnen mit Perihelabständen der Größenordnung $15 R_\odot$ durchlaufen (Abb.18).

Bei einem langsamen Durchgang der Sonne durch eine interstellare Dunkelwolke der oben beschriebenen Art werden diese kleinen dielektrischen Staubpartikel bis zu so großen Stoßparametern eingefangen, daß sich Bahnen mit Perihelabständen bis zur Größenordnung 4 A.E. ergeben.

Desgleichen verbleiben dielektrische Partikel, die von Neuen Kometen der Periheldistanz $q \leq 0.64$ A.E. zwischen heliozentrischen Abständen 10.A.E. und 3 A.E. ausgeworfen werden im Sonnensystem, wofern diese Teilchen Radien a haben mit $a \leq 3 \cdot 10^{-4}$ cm. Diese Teilchen beschreiben Bahnen mit Periheldistanzen der Größenordnung 0,5 A.E. Ist $q \approx 20 R_\odot$, so werden auch noch Teilchen mit Radien $a \leq 5 \cdot 10^{-4}$ cm eingefangen, die zwischen 10 A.E. und 0,5 A.E. Sonnenabstand vom Kometen ausgestreut werden.

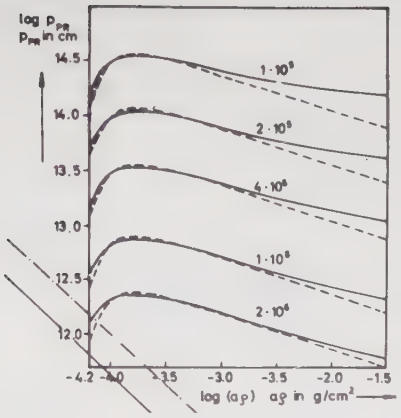


Abb.7: log(p_{PR}) in Abhängigkeit von log(a). p_{PR} Einfang-Stoßparameter in cm, a Teilchenradius in cm, ρ Teilchendichte in g/cm^3. Parameter: Annäherungsgeschwindigkeit aus dem Unendlichen in cm/sec. Ausgezog. Kurven nach Best und Patterson (1962), gestrichelte Kurven nach Gl.(81) mit Q_{pr}=1. Ausgez. und gestr. Geraden: Fehlergrenzgeraden für Maximalfehler 3% bzw. 1.5%.(S.Text)

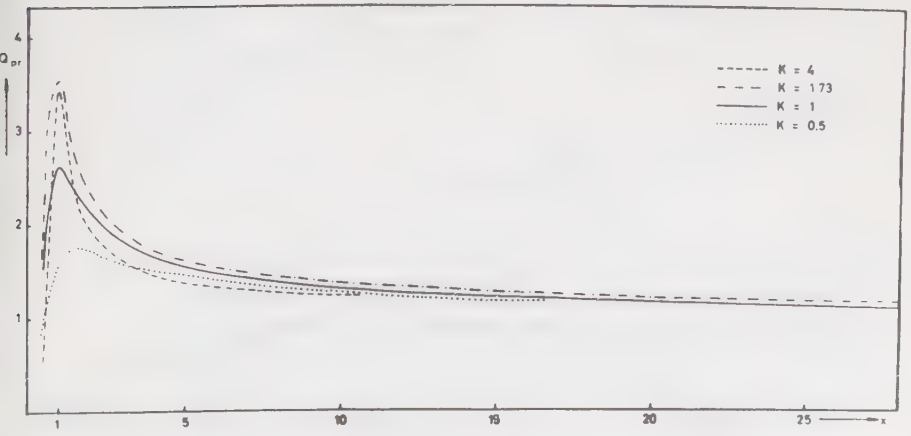
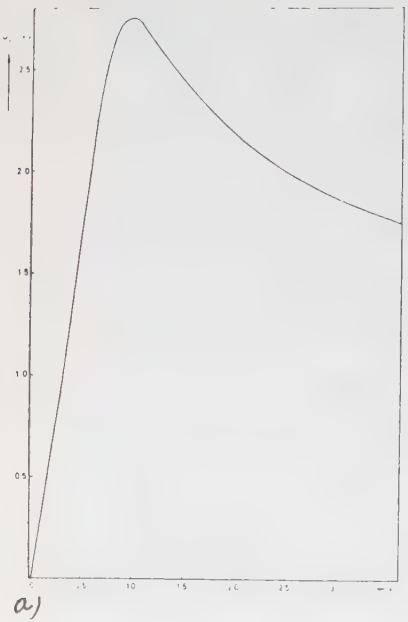
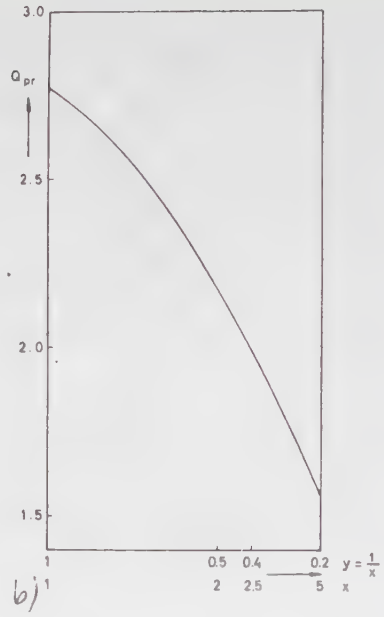


Abb.9: Q_{pr}(x) für n=1.29(1-ki) mit k=4 (– – –), k=1.73 (–·–·–) k=1 (———) und k=0.5 (·····).





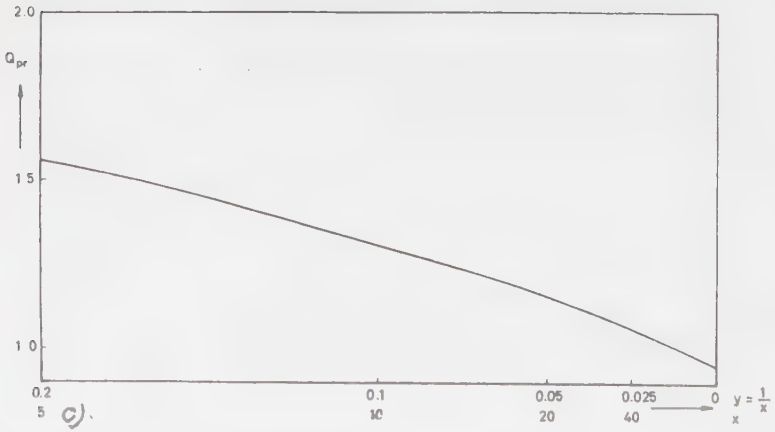


Abb.8: $Q_{pr}(x)$ für n=1.27-1.37i in Abhängigkeit von $x = \frac{2\pi a \nu}{c}$ bzw. $y = 1/x$.

8a: $0 \leq x \leq 3.5$ 8b: $1 \leq y \leq 0.2$ 8c: $0.2 \leq y \leq 0$.

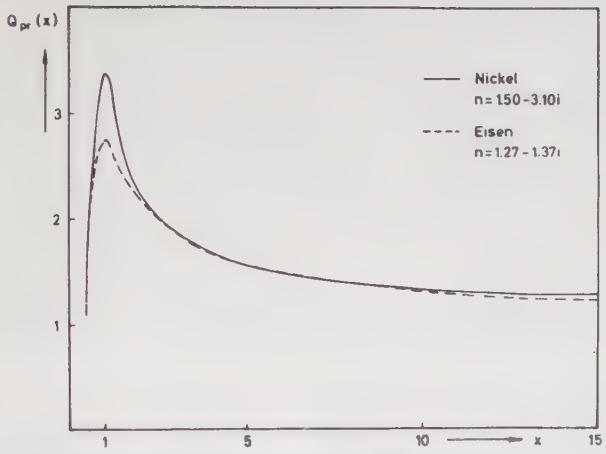


Abb.10: $Q_{pr}(x)$ für Nickel mit n=1.30-3.10i (——) und Eisen mit n=1.27-1.37i.(----)

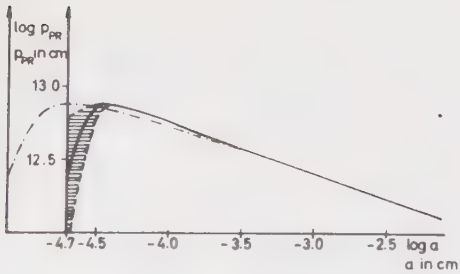


Abb.11: $\log(p_{PR})$ in Abhängigkeit von $\log(a)$ für Eisenteilchen mit n=1.27-1.37i, ρ=7.8 g/cm^3 (ausgezogene Kurve). Das schraffierte Gebiet enthält die entsprechenden Kurven für Teilchen mit Brechungsindices, die dem des Eisens ähnlich sind, und mit der Dichte ρ =7.8 g/cm^3. Strichpunktierte Kurve: $\log(p_{PR})$ für Eisenteilchen mit $Q_{pr}\equiv 1$. Annäherungsgeschwindigkeit v=20 km/sec.

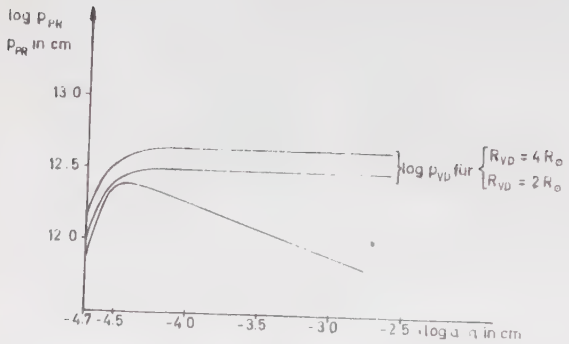


Abb.12: Log. des Einfang-Stoßparameters p_{PR} in Abhängigkeit von log(a) (Eisenteilchen); Log. des Verdampfungs-Stoßparameters p_{VD} in Abhängigkeit von log(a) mit Parameter $R_{VD}=4R$ und $R_{VD}=2R$.(R_{VD} Radius derjenigen Kugel um die Sonne, innerhalb derer die Teilchen verdampfen) Annäherungsgeschwindigkeit v=20 km/sec.

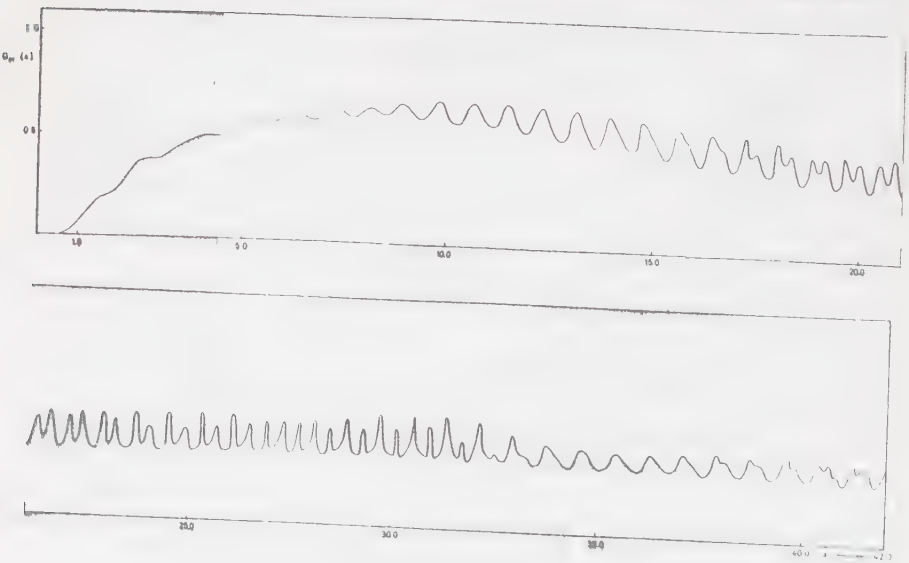


Abb.13: $Q_{pr}(x)$ für n=1.333 , $0 \leq x \leq 42$.

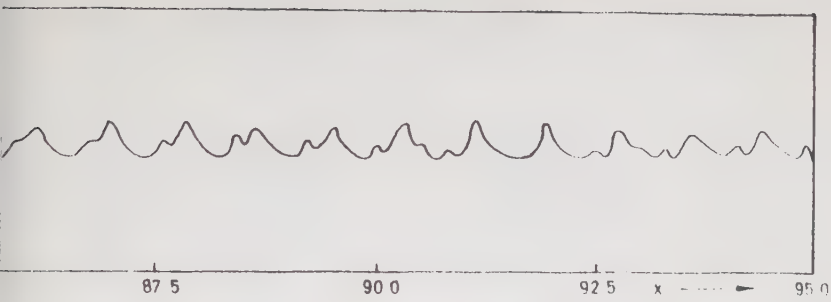


Abb.14: $Q_{pr}(x)$ für n=1.333 , $85 \leq x \leq 95$.

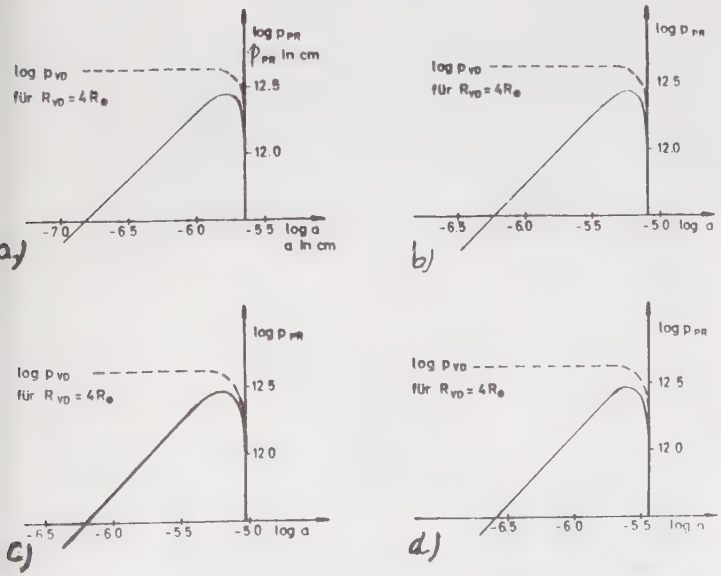


Abb.15: $\log(p_{PR})$ und $\log(p_{VD})$ für 4 verschiedene Teilchenarten (dielektrische Teilchen mit Radien $a \leq 10^{-5}$ cm)
15a: $n=\infty$, $\rho = 1$ g/cm^3 ; 15b: n=1.33 , ρ=1 g/cm^3 ;
15c: n=1.5 , ρ=2.5g/cm^3 ; 15c: n=2.0 , ρ=2.5 g/cm^3.

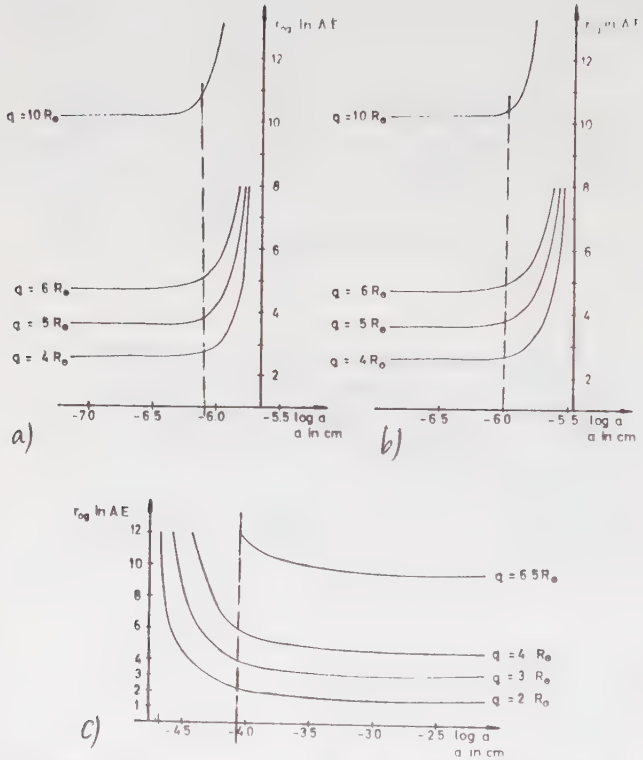


Abb. 17: $r_{og}(\log(a))$ in A.E. für verschiedene Teilchenarten.
17a: $n=\infty$, $\rho = 1\,g/cm^3$; 17b: $n=2$, $\rho = 2.5\,g/cm^3$.
17c: Eisenteilchen.
Parameter q: Periheldistanz des ausstreuenden Kometen.
(Die Kurven können links (17a,17b) bzw. rechts (17c) von der gestrichelt eingetragenen Geraden mit beträchtlichen Fehlern behaftet sein; sie werden nur für Radien aus den übrigen Intervallen verwendet.)

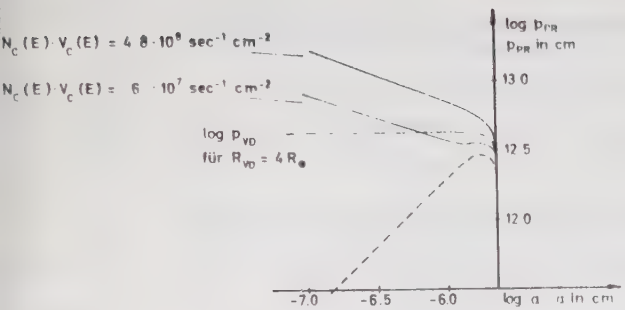


Abb.18: p_{PR} unter Berücksichtigung des korpuskularen Poynting-Robertson-Effektes (ausgez. Kurven) und ohne Berücksichtigung desselben (gestrich. Kurve), p_{VD} für $R_{VD}=4R_*$ (strichpunkt.). Parameter: $N_c(1A.E.)V_c$ in $sec^{-1}cm^{-2}$. Totalreflektierende Teilchen mit $\varrho = 1 g/cm^3$. Annäherungsgeschwindigkeit v=20 km/sec.

Literatur:

Becker W., Sterne und Sternsysteme, Verlag von Theodor Steinkopff, Dresden und Leipzig, 1950.

Behr A., H.Siedentopf, Z.Aph. 32, 19 (1953).

Best G.T., T.N.L.Patterson, Planet.Space Sci. 9,801 (1962).

Elsässer H., Z.Aph. 33, 274 (1954).

Elsässer H., Mitt.Astron.Ges. 1957/II, 61 (1958).

Giese R.H., H.Siedentopf, Z.Aph. 54, 200 (1962).

Guess A.W., Ap.J. 135, 855 (1962).

Harwitt G., J.geophys.Res.68, 2178 (1963).

Haug U., Z.Aph. 44, 71 (1958).

van de Hulst H.C., Rech.astr. de l'Obs. d'Utrecht IX, 1 (1946)

van de Hulst H.C., Light Scattering of Small Particles. New York, John Wiley & Sons, Inc.,(1957).

Jahnke-Emde-Lösch, Tafeln höherer Funktionen, B.G.Teubner, Stuttgart (1960).

Johnson,F.S., J. Meteorology 11, 431 (1954).

Joos G., Lehrbuch der theoret. Physik, Akad.Verlagsges.Leipzig (1956).

Lyttleton R.A., M.N. 108, 465 (1948).

Lyttleton R.A., The Observatory 72, 33 (1952).

Oort J.H., M. Schmidt, BAN 11, 259 (1951).

Oort J.H., Empirical Data on the Origin of Comets. The Solar System IV. Edited by B.M. Middlehurst and G.P. Kuiper, Univ. of Chicago Press (1963).

Oort J.H., The Observatory 71, 143 (1951).

Over J., Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetenschappen, 51B, 74 (1958).

Panofsky W.K.H., Phillips M., Classical Electricity and Magnetism. Cambridge, Mass., Addison-Wesley Publishing Co. Inc. (1958).

Porter J.G., The Statistic of Comet Orbits. The Solar System IV. Edited by B.M.Middlehurst and G.P.Kuiper, Univ. of Chicago Press (1963).

Poynting J.H., Phil.Trans.Roy.Soc., A, 202, 525 (1903).

Richter N.B., Statistik und Physik der Kometen. J.A.Barth-Verlag, Leipzig (1954).

Robertson H.P., M.N. 97, 423 (1937).

Schalén C., Z.Aph., 17, 260 (1939).

Sekanina Z., BAC 1, 12 (1961).

Siedentopf H., Grundriß der Astrophysik. Wissenschaftl. Verlagsges. m.b.H., Stuttgart (1950).

Thomas L.H., Quart. J.Math. (Oxford) 1, 239 (1930).

Whipple F.L., Ap.J. 121, 750 (1955).

Herrn Prof. Dr. H. Siedentopf † bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit wie auch für sein stets förderndes Interesse zu großem Dank verpflichtet. Ich danke auch Herrn Dr. J. Pfleiderer für viele anregende und klärende Diskussionen, Herrn Dr. R.H. Giese für mannigfache Unterstützung und Frau U. Jensbach für die Anfertigung der graphischen Darstellungen.

Lebenslauf

Ich wurde am 4.5.1935 als Sohn des Lehrers Josef Schäfer und seiner Ehefrau Berta Schäfer, geb. Grumann, in Ostrach (Kreis Sigmaringen) geboren. Von 1941 bis 1945 besuchte ich die Volksschule in Stein (Kreis Hechingen), von 1945-1954 das Staatliche Gymnasium in Hechingen, an dem ich im Frühjahr 1954 die Reifeprüfung ablegte. Anschließend studierte ich an der Universität Tübingen Physik (Hauptfach), Mathematik und Chemie (Nebenfächer). Im Herbst 1960 schloß ich mein Studium ab mit der Wissenschaftlichen Prüfung für das Lehramt an Gymnasien. Vom 16.1.1961 bis zum 30.9.1962 war ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter bei der Firma Internationale Büro-Maschinen Geschellschaft m.b.H. in Düsseldorf, Stuttgart und Darmstadt tätig. Ab Herbst 1962 war ich am Astronomischen Institut der Universität Tübingen unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. H. Siedentopf mit meiner Promotionsarbeit beschäftigt.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren und Dozenten Dres: H.Siedentopf, H.Scheffler und K.Walter (Astronomie), G.Elwert (Theoretische Physik und Theoretische Astrophysik), W.Braunbek (Theoretische Physik), W.Kossel, H.Krüger, E.Menzel, G.Möllenstedt und H.Schüler (Physik),E.Kamke, M.Müller,G.Pickert und H.Wielandt (Mathematik), H.Hellmann (org. Chemie), E.Müller (Chemie) und W.Rüdorff (anorg. Chemie), O.F.Bollnow und B.v.Freytag gen. Löringhoff (Philosophie).

Fotodruck Frau Elly HUTH Tübingen